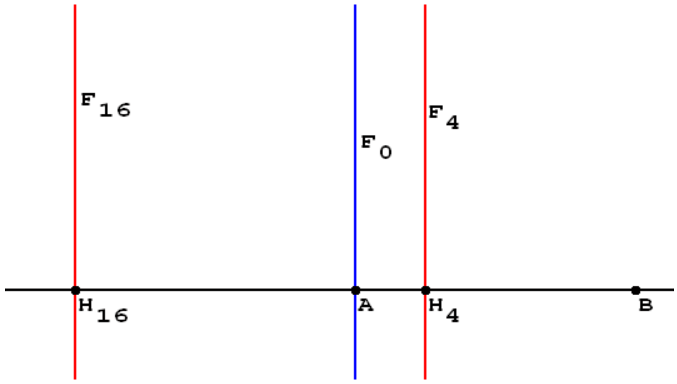
Correction devoir maison n°11

Exercice 1

1) $k=0$, donc on cherche les points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=0$. Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ orthogonaux $\Leftrightarrow (AB)$ et (AM) perpendiculaire $\Leftrightarrow M$ appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par A.



On en déduit donc que

$\boxed{F_0 \text{ est la perpendiculaire à } (AB) \text{ passant par } A}$

2) $k \in \mathbb{R}$

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM}$ or (AB) et (HM) sont perpendiculaires par construction donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM}=0$. On en déduit $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=k}$

b. Par construction, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\pm AB\times AH$ et alors $AB\times AH=|k|$ d'où $\boxed{AH=\frac{|k|}{4}}$

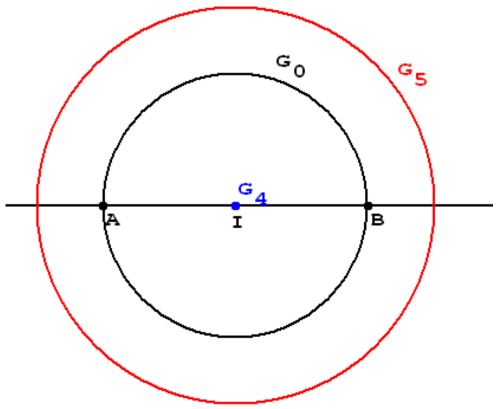
Si $k\geq 0$, cela signifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}>0$ et donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens et H appartient à la demi-droite $[AB)$.
Si $k\leq 0$, cela signifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}<0$ et donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire et H appartient à $[BA)$.

c. Soit $k\in\mathbb{R}$, on construit H tel que $AH=\frac{|k|}{4}$ et sur la demi-droite $[AB)$ si $k\geq 0$ et sur la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B si $k\leq 0$. Tous les points de cette droite vérifient facilement $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=k$. Donc : $\boxed{F_k \text{ est la perpendiculaire à } (AB) \text{ passant par } H}$

d. Pour F_4, on construit H_4 sur $[AB)$ avec $AH_4=1$ et on trace la perpendiculaire à (AB) passant par H_4.
Pour F_{-16}, on construit H_{-16} sur la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B avec $AH_{-16}=4$ et on trace la perpendiculaire à (AB) passant par H_{-16}.

Exercice 2

1) Pour $k=0$, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ et donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que $\boxed{(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont perpendiculaires.}}$ Or, ceci n'est vrai que si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Tous les points de ce cercle conviennent et donc $\boxed{G_0 \text{ est le cercle de diamètre} [AB]}$



2) $k\in\mathbb{R}$

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

Or $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=0$ car I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.

De plus, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-IA^2=-2^2=-4$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-4}$

b. $M\in G_k \Leftrightarrow MI^2-4=k \Leftrightarrow \boxed{MI^2=k+4}$

c. Si $k<-4$, alors $MI^2=k+4<0$ et donc il n'y a aucun point M qui convient (un carré n'est jamais négatif sur $\mathbb{R}$) donc $\boxed{G_k=\emptyset}$

Si $k=-4$, alors $MI^2=0$ et donc $\boxed{G_{-4}=\{I\}}$

Si $k>-4$ alors $MI^2>0$ et on a donc

$M \in G_k \Leftrightarrow MI^2 = k + 4 \Leftrightarrow MI = \sqrt{k+4} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+4}$

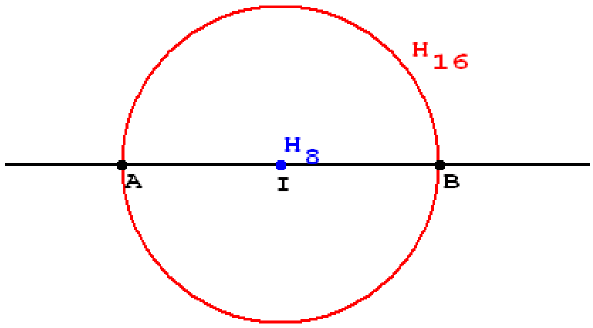
Donc $\boxed{G_k \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{k+4}}$

d. Pour $k = 5 > -4$, G_5 est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5+4} = 3$.

Pour $k = -4$: $G_{-4} = I$. Et pour $k = -5$, G_{-5} n'existe pas.

Exercice 3

1) Pour $k = 0$, on a $MA^2 + MB^2 = 0$ donc, comme $MA^2 \geq 0$ et $MB^2 \geq 0$, on trouve $MA = MB = 0$. Or ceci est impossible car cela imposerait $M = A = B$... Donc $\boxed{H_0 = \emptyset}$



2) $k \in \mathbb{R}$

a. $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$ d'où en développant :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IA^2 + IB^2$

Or $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$ car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ avec I le milieu de $[AB]$.

De plus, $IA^2 + IB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

On en déduit : $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8}$

b. $M \in H_k \Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = k \Leftrightarrow \boxed{MI^2 = \frac{k-8}{2}}$

c. Si $k < 8$, alors $MI^2 < 0$. Ceci signifie qu'il n'y a aucun point M qui convient et $\boxed{H_k = \emptyset}$.

Si $k = 8$, alors $MI^2 = 0$ et donc $\boxed{H_8 = \{I\}}$

Si $k > 8$, alors $MI = \sqrt{\frac{k-8}{2}}$ et ceci signifie que M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-8}{2}}$. Comme tous les points de ce cercle conviennent, on a $\boxed{H_k \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{k-8}{2}}}$

d. Pour H_2, ce point n'existe pas. Pour H_8, c'est le point I.

Pour H_{16}, c'est le cercle de centre I et de rayon 2.