

Correction devoir maison n°12

Exercice 1

Dans le triangle ABC , on connaît $AB = 150m$, $\widehat{BAC} = 48 + 32 = 80^\circ$ et $\widehat{ABC} = 44^\circ$. On en déduit que $\widehat{BCA} = 56^\circ$ (la somme des angles dans un triangle est 180°)

On utilise la formule des sinus : $\frac{AB}{\sin \widehat{BCA}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}}$

On en déduit : $BC = \frac{150 \sin(80)}{\sin(56)} m$.

Dans le triangle ABD , on connaît $AB = 150m$, $\widehat{BAD} = 48^\circ$ et $\widehat{ABD} = 44 + 37 = 81^\circ$. On en déduit $\widehat{ADB} = 51^\circ$.

On utilise la formule des sinus : $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}}$.

On en déduit : $BD = \frac{150 \sin(48)}{\sin(51)} m$.

Dans le triangle BCD , on connaît BC et BD calculées précédemment et $\widehat{CBD} = 37^\circ$.

On utilise la formule d'Al Kashi : $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \times BC \times BD \times \cos \widehat{CBD}$.

Avec l'application numérique, on trouve $CD \approx 107,24 m$

Exercice 2

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) \text{ donc } \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

On en déduit donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ car $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$.

Pour calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on peut au choix, utiliser $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$ ou $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ ou encore $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$...

Dans tous les cas, on trouve : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (comme précédemment, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$)

$$2) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} ; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \text{ et } \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

$$3) \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\sqrt{\sqrt{2}+2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} \right]$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + 0 \text{ donc } \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ donc } \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

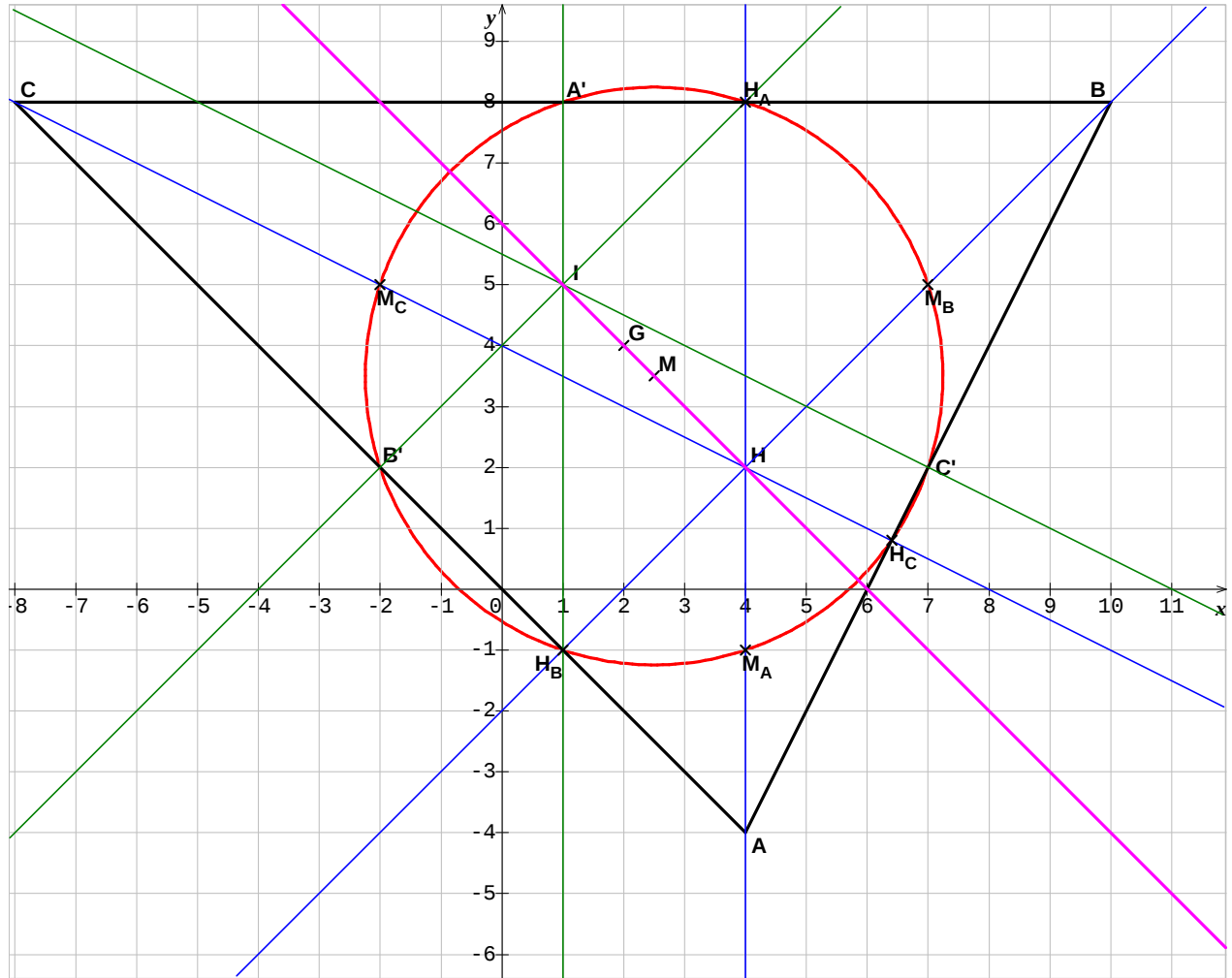
$$4) \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} ; \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2}{16} \left[\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{(\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})} + 2 - \sqrt{2} \right] = \frac{1}{8} [4 + 2\sqrt{2}] = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \text{ et } \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{On a donc : } \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2+2-\sqrt{2}}{4} = 2$$

Exercice 3

1) Voir la figure :



2) Le centre de gravité d'un triangle ABC est le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$.

On a donc : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4 + 10 - 8}{3} = 2$ et $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-4 + 8 + 8}{3} = 4$. D'où $G(2; 4)$

3) La médiatrice du segment $[AC]$ passe par le milieu B' de $[AC]$ et est perpendiculaire à (AC) .

Les coordonnées de B' sont : $x_{B'} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4 - 8}{2} = -2$ et $y_{B'} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-4 + 8}{2} = 2$. Donc $B'(-2; 2)$.

On cherche l'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ passant par B' . L'équation est donc de la forme $-12x + 12y + c = 0$. En remplaçant par les coordonnées de B' , on trouve : $c = -48$.

Une équation de la médiatrice de $[AC]$ est donc $-12x + 12y - 48 = 0$ ou en simplifiant par 12 : $-x + y - 4 = 0$

De la même manière, on trouve les coordonnées de A' milieu de $[BC]$: $A'(1; 8)$, les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'équation de la médiatrice de $[BC]$: $-18x + 18 = 0$ ou, en version simplifiée : $x = 1$

4) Pour déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit, on résout le système : $\begin{cases} -x + y - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ ce qui donne $I(1; 5)$

5) La hauteur issue de A dans le triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) . On raisonne comme ci-dessus avec $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'équation de la forme $-18x + c = 0$. En utilisant le point A , on trouve $c = 72$ d'où l'équation simplifiée : $x = 4$

Pour la hauteur issue de B , on a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et donc l'équation de la forme $-12x + 12y + c = 0$ et à l'aide de B , on trouve $c = 24$ d'où : $-x + y + 2 = 0$

6) Pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC , on résout le système : $\begin{cases} x = 4 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases}$ et on trouve $H(4; 2)$

7) $\vec{GI} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{GH} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{GH} = -2\vec{GI}$ et les vecteurs $\vec{GH}$ et $\vec{GI}$ sont colinéaires et les points G, H et I sont alignés.

8) M est le milieu de $[IH]$ donc les coordonnées de M sont $x_M = \frac{x_I + x_H}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_M = \frac{y_I + y_H}{2} = \frac{7}{2}$ donc $M \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right)$

Il faut ensuite déterminer le rayon du cercle et pour cela calculer la longueur MA' :

$$MA' = \sqrt{(x_{A'} - x_M)^2 + (y_{A'} - y_M)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{2}}$$

L'équation du cercle de centre M passant par A' est donc $\boxed{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}}$

9) Pour B' : ses coordonnées sont $(-2; 2)$: $\left(-2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{90}{4} = \frac{45}{2}$ donc B' appartient au cercle.

Pour C' , c'est le même calcul avec $C'(7; 2)$

Pour les pieds des hauteurs, on doit trouver leurs coordonnées. Pour H_A (le pied de la hauteur issue de A), on résout le système $\begin{cases} y = 8 \text{ équation de } (BC) \\ x = 4 \text{ équation de la hauteur} \end{cases}$ d'où $H_A(4; 8)$.

On vérifie ensuite : $\left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$ donc H_A appartient au cercle.

Il faut faire la même chose avec $H_B(1; -1)$ et $H_C\left(\frac{32}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Pour les points au milieu des segments reliant H aux sommets A, B et C : on fait la même vérification avec $M_A(4; -1)$; $M_B(7; 5)$ et $M_C(-2; 5)$