

Correction devoir maison n°13

Exercice 1

1) Le mois de mai compte 31 jours et l'organisateur verse 60 000 000 € chaque jour, ce qui fait un total de

$$\boxed{1\,860\,000\,000\text{ €}}$$

2)

a. D'après l'énoncé, la somme reversée double chaque jour, donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

$$\text{On a donc : } u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

La somme reversée le 10 mai correspond à u_{10} .

$$u_{10} = 2^9 = 512 \text{ donc le 10 mai, on doit reverser } \boxed{512\text{ €}}.$$

b. La somme totale reversée est égale à

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{31} = u_1 \times \frac{q^{31} - 1}{q - 1} = 1 \times \frac{2^{31} - 1}{2 - 1} = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$$

On doit donc reverser au total $\boxed{2\,147\,483\,647\text{ €}}$, autrement dit beaucoup plus que ce que l'organisateur a donné !

Exercice 2

$$1) \quad u_1 = \frac{5u_0 - 3}{1 + u_0} = \frac{5 \times 0 - 3}{1 + 0} = -3$$

$$u_2 = \frac{5u_1 - 3}{1 + u_1} = \frac{5 \times (-3) - 3}{1 - 3} = 9$$

$$u_3 = \frac{5 \times 9 - 3}{1 + 9} = 4,2$$

$$u_1 - u_0 = -3 - 0 = -3 \text{ alors que } u_2 - u_1 = 9 - (-3) = 12 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}$$

Comme $u_0 = 0$, la suite ne peut pas être géométrique (sinon tous les termes seraient nuls...)

2)

$$a. \quad v_0 = \frac{3 - u_0}{1 - u_0} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3$$

$$v_1 = \frac{3 - u_1}{1 - u_1} = \frac{3 - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = \frac{3 - u_2}{1 - u_2} = \frac{3 - 9}{1 - 9} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{3 - u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{5u_n - 3}{1 + u_n}}{1 - \frac{5u_n - 3}{1 + u_n}} = \frac{3 + 3u_n - 5u_n + 3}{1 + u_n} \times \frac{1 + u_n}{1 + u_n - 5u_n + 3} = \frac{6 - 2u_n}{4 - 4u_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{6 - 2u_n}{4 - 4u_n} \times \frac{1 - u_n}{3 - u_n} = \frac{2(3 - u_n)(1 - u_n)}{4(1 - u_n)(3 - u_n)} = \frac{1}{2}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$c. \quad \text{On a donc pour tout } n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ d'où } \boxed{v_n = \frac{3}{2^n}}$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{3 - u_n}{1 - u_n} = v_n \Rightarrow 3 - u_n = v_n(1 - u_n) \Rightarrow (-1 + v_n)u_n = v_n - 3 \Rightarrow u_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 1}$$

Cette dernière expression a un sens, car d'après l'expression de v_n , on a bien $v_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc :

$$u_n = \frac{\frac{3}{2^n} - 3}{\frac{3}{2^n} - 1} = \boxed{\frac{3(1 - 2^n)}{3 - 2^n}}$$

$$\text{On vérifie : } \frac{3(1 - 2^0)}{3 - 2^0} = \frac{3(1 - 1)}{3 - 1} = 0 = u_0$$

$$\frac{3(1-2^1)}{3-2^1} = \frac{3(1-2)}{3-2} = -3 = u_1$$

$$\frac{3(1-2^2)}{3-2^2} = \frac{3(1-4)}{3-4} = 9 = u_2$$

$$\frac{3(1-2^3)}{3-2^3} = \frac{3(1-8)}{3-8} = \frac{-21}{-5} = 4,2 = u_3$$

Exercice 3

1) $u_1 = \frac{u_0+2v_0}{3} = \frac{5}{3}$ et $v_1 = \frac{u_0+4v_0}{5} = \frac{9}{5}$

$u_2 = \frac{u_1+2v_1}{3} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{18}{5}}{3} = \frac{79}{45}$ et $v_2 = \frac{u_1+4v_1}{5} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{36}{5}}{5} = \frac{133}{75}$

$u_3 = \frac{u_2+2v_2}{3} = \frac{\frac{79}{45}+\frac{266}{75}}{3} = \frac{17895}{10125} = \frac{1193}{675}$ et $v_3 = \frac{u_2+4v_2}{5} = \frac{\frac{79}{45}+\frac{532}{75}}{5} = \frac{29865}{16875} = \frac{1991}{1125}$

2) $u_1 - u_0 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ et $u_2 - u_1 = \frac{79}{45} - \frac{5}{3} = \frac{79-75}{45} = \frac{4}{45}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{79}{45}}{\frac{5}{3}} = \frac{79}{75}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

3) Le même type de calcul permet de montrer que (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5} - \frac{u_n+2v_n}{3} = \frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15} = \frac{2v_n-2u_n}{15} = \frac{2}{15}(v_n - u_n) = \frac{2}{15}w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{15}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times \left(\frac{2}{15}\right)^n$ or $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$. D'où $w_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n$

Donc la suite (t_n) est constante et $t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23$

6) On a donc : $\begin{cases} v_n - u_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n \\ 3u_n + 10v_n = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = u_n + \left(\frac{2}{15}\right)^n \\ 13u_n = 23 - 10\left(\frac{2}{15}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{23+3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n = \frac{23-10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$

7) Comme $0 < \frac{2}{15} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ donc par addition et division, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{23}{13} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$