Correction devoir maison n°14

Exercice 1

1) On note a et b les deux côtés non connus du triangle ABC tel que b soit l'hypoténuse.

Les trois côtés du triangle sont en progression arithmétique et b est le plus long côté. Il y a donc deux possibilités :

- Soit : $1; a; b$ sont en progression arithmétique ;
- Soit : $a; 1; b$ sont en progression arithmétique.

Pour le 1[er] cas : $1; a; b$ sont en progression arithmétique, alors il existe un réel r tel que $a = 1 + r$ et $b = 1 + 2r$.
Comme ABC est un triangle rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore et alors $1^2 + a^2 = b^2$. Or :

$$1^2 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow 1 + (1 + r)^2 = (1 + 2r)^2 \Leftrightarrow 3r^2 + 2r - 1 = 0$$

Cette équation est une équation du second degré : $\Delta = 16$ et il y a donc deux solutions : $r_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $r_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$.

La valeur de r_1 ne convient pas car alors les côtés auraient pour longueurs : $1; 0; -1$ ce qui est impossible.

Pour la valeur r_2, on trouve comme côtés : $\boxed{1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}}$.

Pour le 2[ème] cas : $a; 1; b$ sont en progression arithmétique, alors il existe r tel que $1 = a + r$ et $b = 1 + r$.
Toujours en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient : $a^2 + 1^2 = b^2$ d'où :

$$a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow (r - 1)^2 + 1 = (1 + r)^2 \Leftrightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$$

Cette valeur de r donne donc comme côtés : $\boxed{\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}}$.

On remarque que les deux triangles obtenus sont semblables !

2) On raisonne de la même manière :

1[er] cas : $1; a; b$ sont en progression géométrique et sont positifs donc il existe un réel $q > 0$ tel que $a = q$ et $b = q^2$.
Alors, en utilisant le théorème de Pythagore, on trouve : $1^2 + a^2 = b^2$ or :

$$1 + q^2 = q^4 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

C'est une équation bicarrée : on pose $x = q^2$ et on doit résoudre $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

$\Delta = 5$ et il y a deux solutions $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La deuxième solution est négative donc seule la première convient. D'où $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La raison q doit être positive car a est une longueur donc $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Finalement, on trouve comme côtés de ABC : $\boxed{1; \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

2[ème] cas : $a; 1; b$ sont en progression géométrique donc il existe $q > 0$ tel que $1 = aq$ et $b = q$.

$$1^2 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{q}\right)^2 = q^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

Nous avons déjà résolu cette équation pour trouver $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

D'où, les longueurs des trois côtés de ABC : $\boxed{\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}; 1; \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

Remarque : les deux solutions obtenues sont aussi des triangles semblables !

Exercice 2

1)
2)
    a. $\boxed{c_1 = 3 \ ; \ c_2 = 12 \ ; \ c_3 = 48}$

    b. On observe que la transformation multiplie le nombre de côtés par 4. En effet un segment est coupé en trois, on conserve les deux parties extérieures et on remplace le segment central par deux segments. Ceci nous donne donc quatre segments. Comme ceci est vrai à toutes les étapes, on a la relation $c_{n+1} = c_n \times 4$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (c_n) \ \text{ est géométrique de raison } 4}$.

    c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = c_1 \times q^{n-1}$ donc $\boxed{c_n = 3 \times 4^{n-1}}$

3)
    a. Pour p_1 : on a trois côtés qui mesurent chacun a donc $\boxed{p_1 = 3a}$.

Pour p_2 : on a 12 côtés de longueur $\frac{a}{3}$ (chaque segment de l'étape 1 a été coupé en trois parties de même longueurs.

Donc $\boxed{p_2 = 4a}$

Pour p_3 : on a 48 côtés de longueur $\frac{a}{9}$ donc $\boxed{p_3 = \frac{16a}{3}}$

    b. A l'étape n : on a une figure avec c_n côtés de longueur $\frac{a}{3^{n-1}}$ donc $p_n = c_n \times \frac{a}{3^{n-1}} = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{a}{3^{n-1}}$

D'où : $\boxed{p_n = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

    c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \neq 0$ car il s'agit de multiplication de nombres strictement positifs .

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3a\left(\frac{4}{3}\right)^n}{3a\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} = \frac{4}{3}$$

Le résultat ne dépend pas de n donc la suite (p_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3}$.

$\frac{4}{3} > 1$ et $p_1 > 0$ donc la suite (p_n) diverge et sa limite est $+\infty$.

4)
    a. a_1 est l'aire d'un triangle équilatéral de côté a. Utilisons la formule des sinus : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\hat{A})$ donc $a_1 = \frac{1}{2}a \times a \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{a_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

Pour a_2 : on ajoute à a_1 l'aire de trois triangles de côtés $\frac{a}{3}$. Donc :

$$a_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{3}}$$

Pour a_3 : on ajoute à a_2, l'aire de 12 triangles de côtés $\frac{a}{9}$ donc :

$$a_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} + 12 \times \frac{\left(\frac{a}{9}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{27} = \boxed{\frac{10a^2\sqrt{3}}{27}}$$

    b. $a_2 - a_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ et $a_3 - a_2 = \frac{10a^2\sqrt{3}}{27} - \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{27}$

Les résultats sont différents donc (a_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{10a^2\sqrt{3}}{27}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{3}} = \frac{10}{9}$$

Les résultats sont différents donc (a_n) n'est pas géométrique.

    c. A l'étape $n+1$: on ajoute à l'aire a_n, l'aire de c_n petits triangles équilatéraux de côtés $\frac{a}{3^n}$.

En effet, un triangle équilatéral est ajouté sur chaque côté de la figure de l'étape n. Ce qui donne bien c_n petits triangles. L'aire ajoutée est donc égale à :

$$c_n \times \frac{\left(\frac{a}{3^n}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4 \times 3^{2n}} = \boxed{a^2\sqrt{3} \times \frac{4^{n-2}}{3^{2n-1}}}$$

d. On considère la suite (b_n) définie par $b_n = a^2\sqrt{3} \times \frac{4^{n-2}}{3^{2n-1}}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \neq 0$ car il ne s'agit de multiplications entre des nombres strictement positifs.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^2\sqrt{3} \times \frac{4^n}{3^{3n+1}}}{a^2\sqrt{3} \times \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}} = \frac{4}{9}$$

Ce résultat ne dépend pas de n donc (b_n) est géométrique de raison $\frac{4}{9}$.

A l'aide de ce qui précède : $a_{n+1} - a_n = b_n$ et donc :

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1$$

C'est la somme des $n-1$ premiers termes de la suite géométrique (b_n).

Donc :

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = b_1 \times \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{4}{9}\right) - 1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

Par ailleurs, $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = a_n - a_1$ en simplifiant les termes a_2, …a_{n-2}.

On en déduit :

$$a_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\right]}$$

e. On considère (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $u_1 = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = u_1 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.

Comme $\frac{4}{9} \in]-1; 1[$, la suite (u_n) converge vers 0.

On en déduit que la suite (a_n) converge vers $\boxed{\frac{2a^2\sqrt{3}}{5}}$