Correction devoir maison n°2

Exercice 1

1) Pour tout $x \in I$, $ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

Par identification, on a le système : $\begin{cases} a = -2 \\ 2a + b = 0 \\ 2b + c = 11 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$.

Finalement, pour tout $x \in I$, on a $\boxed{f(x) = -2x + 4 + \frac{3}{x+2}}$.

2) La fonction f est donc la somme de deux fonctions $u: x \mapsto -2x + 4$ et $v: x \mapsto \frac{3}{x+2}$.

La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur -2 donc est décroissante sur I.

La fonction v est la composée de la fonction $g: x \mapsto x + 2$ suivie de la fonction $h: x \mapsto \frac{3}{x}$. On a $v = h \circ g$.

g croissante sur $I =]-2; +\infty[$. Ses images appartiennent à $]0; +\infty[$.

h est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par composition, v est décroissante sur I.

La somme de deux fonctions décroissantes sur un intervalle est une fonction décroissante donc

$\boxed{f \text{ est décroissante sur } I}$.

Exercice 2

On pose $X = x^2 + x$.

L'équation est donc équivalente à $X^2 - 8X + 12 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 16$ donc il y a deux valeurs de X possibles : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{2} = 6$.

Pour chacune des valeurs de X, on cherche les valeurs de x correspondantes :

Pour X_1 : $x^2 + x = 2$ ou encore $x^2 + x - 2 = 0$.

$\Delta = 9$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Pour X_2 : $x^2 + x = 6$ ou encore $x^2 + x - 6 = 0$.

$\Delta = 25$ donc l'équation a deux solutions : $x_3 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x_4 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Au final, l'équation a quatre solutions : $\boxed{S = \{-3; -2; 1; 2\}}$

Exercice 3

1) La distance $OS = 10\ km$ et l'avion vole à une vitesse de $400\ km.h^{-1}$. Donc A parcours la distance OS en $0{,}025\ h$ ce qui représente $\boxed{1 \text{ min } 30}$.

Calcul : $t = \frac{d}{v_A} = \frac{10}{400} = 0{,}025$

2) A un instant t : l'avion A a parcouru $d_A = v_A \times t = 400t\ \ km$.

La distance OA est donc de $(10 - 400t)\ km$.

L'avion B, quant à lui, a parcouru $d_B = v_B \times t = 300t\ \ km$.

Donc $OB = 300t\ \ km$.

Comme le triangle OAB est toujours un triangle rectangle en O, le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ ou encore :

$\boxed{d(t) = AB^2 = (10 - 400t)^2 + (300t)^2 = 250\,000t^2 - 8\,000t + 100}$ en développant.

3) Cette distance AB est minimale quand AB^2 est minimale donc pour

$t_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{8\,000}{500\,000} = 0{,}016\ h$ ce qui représente $d(t_0) = AB^2 = 36$.

$\boxed{\text{La distance } AB \text{ minimale est donc de } 6\ km \text{ atteinte au bout d'environ } 58\ s}$.