# *Correction devoir maison n°3*

**Exercice 1**

On cherche tout d'abord l'ensemble de résolution : l'inéquation ne peut avoir des solutions que si $7-2x-x^2 \geq 0$ (la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$)

Pour résoudre cela, on calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 7 = 32$ donc $-x^2-2x+7$ est du signe de $a=-1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{2+4\sqrt{2}}{-2} = -1-2\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+2\sqrt{2}$.

On résout donc l'inéquation dans $\left[-1-2\sqrt{2}; -1+2\sqrt{2}\right]$.

1^er^ cas : $x \geq 1$ , autrement dit $x \in \left[1; -1+2\sqrt{2}\right]$

Dans ce cas, $1-x \leq 0$ et comme $\sqrt{7-2x-x^2}$ est toujours positif, l'inégalité $\sqrt{7-2x-x^2} \geq 1-x$ est toujours vérifiée.

Donc l'intervalle $\left[1; -1+2\sqrt{2}\right]$ est contenu dans les solutions.

2^ème^ cas : $x < 1$, autrement dit $x \in \left[-1-2\sqrt{2}; 1\right[$.

Dans ce cas $1-x > 0$.

On a donc $\sqrt{7-2x-x^2} \geq 1-x > 0$ et comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ , on a :

$7-2x-x^2 \geq (1-x)^2$ ou encore, en développant : $x^2 \leq 3$.

Les solutions de cette inéquation dans $\mathbb{R}$ sont $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ donc ici, les solutions sont $[-\sqrt{3}; 1[$

Finalement, les solutions de l'inéquation sont : $\boxed{S = \left[-\sqrt{3}; -1+2\sqrt{2}\right]}$

**Exercice 2**

1) Pour $x \neq 1$, on a $ax+b+\frac{c}{1-x} = \frac{ax(1-x)+b(1-x)+c}{1-x} = \frac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{1-x}$

Donc, par identification, on a : $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b=-4 \\ b+c=7 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$

Finalement, pour $x \neq 1$, on a $\boxed{f(x) = -x+3+\frac{4}{1-x}}$

2) $u$ est une fonction affine de coefficient directeur négatif donc est décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$v$ est la composée des fonctions $g: x \mapsto 1-x$ suivi de la fonction $h: x \mapsto \frac{4}{x}$ telle que $v = h \circ g$.

La fonction $g$ est une fonction affine de coefficient directeur négatif donc est décroissante sur $]-\infty; 1[$ (respectivement sur $]1; +\infty[$ ) et ses images appartiennent à $]0; +\infty[$ (respectivement à $]-\infty; 0[$ ) .

Sur $]0; +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty; 0[$ ) la fonction $h$ est décroissante.

Par composition de fonctions, la fonction $v$ est donc croissante sur $]1; +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty; 1[$ )

On a alors :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $u$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $v$ | | ↗ | ‖ | ↗ | |

La fonction $f$ est la somme des deux fonctions $u$ et $v$. Or comme ces deux dernières fonctions n'ont pas le même sens de variations, nous ne pouvons conclure directement sur les variations de $f$.

3) On considère $x_1, x_2$ dans $]1; 3]$ tels que $x_1 < x_2$.

   a. Le calcul donne :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2-4x_1+7}{1-x_1} - \frac{x_2^2-4x_2+7}{1-x_2} = \frac{(x_1^2-4x_1+7)(1-x_2)-(x_2^2-4x_2+7)(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$= \frac{x_1^2 - 4x_1 + 7 - x_1^2 x_2 + 4x_1x_2 - 7x_2 - x_2^2 + 4x_2 - 7 + x_1x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}$$
$$= \frac{x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2(x_1 - x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3 - x_1x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

Or $4 - (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 4 - x_1x_2 + x_1 + x_2 - 1 = x_1 + x_2 + 3 - x_1x_2$ donc :
$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)[4 - (x_1 - 1)(x_2 - 1)]}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

b. Comme $x_1 < x_2$, on a : $x_1 - x_2 < 0$.

Comme $x_1$ et $x_2$ appartiennent à $]1;3]$, on a $1 - x_1 < 0$ et $1 - x_2 < 0$ .
De plus, $0 < x_1 - 1 \leq 2$ et $0 < x_2 - 1 \leq 2$ donc en multipliant membre à membre (ce qui nous avons le droit de faire car tout est positif), on a : $0 < (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 4$ et donc $4 - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$.
Finalement $\boxed{f(x_1) - f(x_2) \leq 0}$.
Nous en déduisons donc que la fonction $f$ est croissante sur $]1;3]$.

4) A l'aide de la calculatrice :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $+\infty$ | ↘ | $6$ | ↗ | ‖ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ |

5) Pour démontrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de $f$, il faut démontrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 2$.

On calcule donc pour $x \neq 0$ :
$$f(1+x) = \frac{(1+x)^2 - 4(1+x) + 7}{1-(1+x)} = \frac{1 + 2x + x^2 - 4 - 4x + 7}{-x} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x}$$
$$f(1-x) = \frac{(1-x)^2 - 4(1-x) + 7}{1-(1-x)} = \frac{1 - 2x + x^2 - 4 + 4x + 7}{x} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x}$$
Donc $\frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2+2x-4}{x} + \frac{x^2+2x+4}{x}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{4x}{x} = 2$

Donc $A$ est le centre de symétrie de la courbe de $f$.

6) On résout dans $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $f(x) = 2$ ou encore $x^2 - 4x + 7 = 2(1-x)$

Cette équation est équivalente à $x^2 - 2x + 5 = 0$.
$\Delta = -16$ donc l'équation n'a pas de solution. $\boxed{S = \emptyset}$
On résout ensuite dans $\mathbb{R} - \{1\}$ l'équation $f(x) = -2$ ou encore $x^2 - 4x + 7 = -2(1-x)$.
Cette équation est équivalente à $x^2 - 6x + 9 = 0$.
$\Delta = 0$ et l'équation a une unique solution $x_0 = 3$. $\boxed{S = \{3\}}$

7) En regardant le tableau de variations :
   a. L'équation $f(x) = k$ n'a aucune solution quand $k \in ]-2;6[$.
   b. L'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $k \in \{-2;6\}$.
   c. L'équation $f(x) = k$ a deux solutions quand $k \in ]-\infty;-2[\cup]6;+\infty[$ .

8) Dans $\mathbb{R} - \{1\}$, l'équation $f(x) = k$ est équivalente à $x^2 - 4x + 7 = k(1-x)$ ou encore :

$x^2 + (k-4)x + 7 - k = 0$
$\Delta = (k-4)^2 - 4 \times 1 \times (7-k) = k^2 - 8k + 16 - 28 + 4k = k^2 - 4k - 12$ .
L'équation $f(x) = k$ a ou n'a pas de solutions selon le signe de $\Delta$. On doit donc trouver le signe de $k^2 - 4k - 12$.
Or $\Delta_k = 64$ et donc $k^2 - 4k - 12$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $k_1 = \frac{4+8}{2} = 6$ et $k_2 = \frac{4-8}{2} = -2$.
Donc $\Delta$ est strictement positif quand $k \in ]-\infty;-2[\cup]6;+\infty[$ et alors l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.
$\Delta$ est nul quand $k \in \{-2;6\}$ et alors $f(x) = k$ a une unique solution.
$\Delta$ est strictement négatif quand $k \in ]-2;6[$ et alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solutions.