626

Correction devoir maison n°5

Exercice 1

1) C' est le symétrique de B par rapport à A donc A est le milieu de $[BC']$ et donc $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB}$.

Avec cette égalité, on trouve que C' est le barycentre de $(A;2)$ et de $(B;-1)$ avec $2-1=1\neq 0$.

2) G, barycentre de $(A;-2)$, $(B;1)$ et $(C;k)$ existe si $-2+1+k\neq 0$, autrement dit si $k\neq 1$. Avec les conditions de l'énoncé : $k\in\mathbb{R}-\{-1;1;2\}$.

3) Pour $k\in\mathbb{R}-\{-1;1;2\}$:

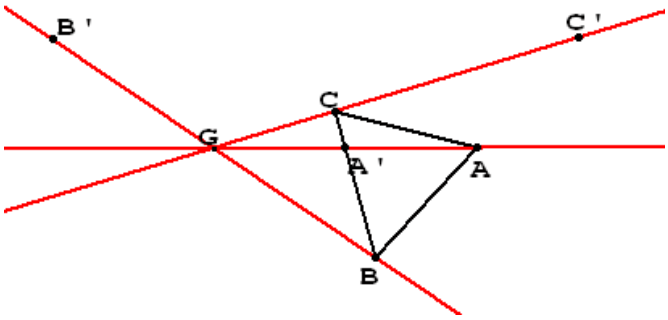
A' est le barycentre de $(B;1)$ et $(C;k)$ et G est le barycentre de $(A;-2)$, $(B;1)$ et $(C;k)$ donc par associativité des barycentres, G est le barycentre de $(A;-2)$ et $(A';1+k)$ (on a bien $-2+1+k\neq 0$). Ceci montre que G appartient à la droite (AA').

B' est le barycentre de $(A;-2)$ et $(C;k)$ donc par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(B;1)$ et $(B';-2+k)$ (on a bien $1-2+k\neq 0$). Ceci montre que G appartient à la droite (BB').

C' est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-1)$ donc aussi de $(A;-2)$ et $(B;1)$. Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(C;k)$ et $(C';-1)$ (on a bien $k-1\neq 0$). Ceci montre que G appartient à la droite (CC').

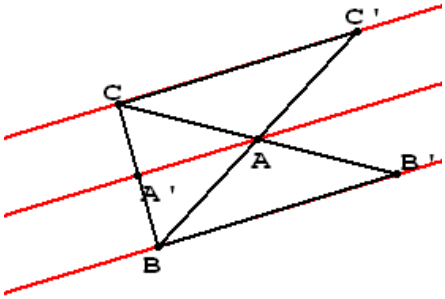
Finalement G appartient à (AA'), (BB') et (CC') et les trois droites sont concourrantes.

4) Pour $k=3$:



5) Pour $k=1$:

a.



b. A' est le barycentre de $(B;1)$ et $(C;1)$ donc A' est le milieu de $[BC]$.

B' est le barycentre de $(A;-2)$ et $(C;1)$ donc $\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$ et donc A est le milieu de $[B'C]$.

Dans le triangle BCB', A' est le milieu de $[BC]$, A est le milieu de $[B'C]$ donc (AA') est parallèle à (BB').

De même, dans le triangle BCC', A est le milieu de $[BC']$ et A' est le milieu de $[BC]$ donc (AA') est parallèle à (CC').

Finalement, (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Exercice 2

1) La racine évidente est 1 : $P(1)=-4+8-1-3=0$.

On peut donc factoriser P par $(x-1)$ pour obtenir la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$. On développe et on identifie les coefficients pour donner : $\begin{cases} a=-4 \\ b-a=8 \\ c-b=-1 \\ -c=-3 \end{cases}$. La résolution du système donne : $\begin{cases} a=-4 \\ b=4 \\ c=3 \end{cases}$.

La factorisation est donc : $P(x) = (x-1)(-4x^2+4x+3)$.
Pour le signe de P, on étudie le signe de chacun des facteurs :

- Pour $x-1$: la valeur annulante est 1
- Pour $-4x^2+4x+3$, on calcule $\Delta = 64$ donc c'est du signe de $a=-4$ sauf entre les deux racines $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

On obtient alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-4x^2+4x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -4x^3+8x^2-x-3 = P(x)$.
3) Pour trouver le tableau de variations de f, on a besoin du tableau de signe de f' donc de P qui est obtenue à la question précédente. D'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de f		↗	$\frac{95}{48}$	↘	$-\frac{5}{6}$	↗	$-\frac{11}{16}$	↘	

4) Pour déterminer une approximation affine locale de $f(2+h)$ pour h proche de 0, il faut calculer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Cette équation est de la forme $y = f'(2)(x-2)+f(2)$.
Or $f'(2) = -4\times 2^3 + 8\times 2^2 - 2 - 3 = -5$ et $f(2) = -2^4 + \frac{8}{3}\times 2^3 - \frac{2^2}{2} - 3\times 2 + 1 = -\frac{5}{3}$
D'où $y = -5(x-2) - \frac{5}{3}$ et en développant : $y = -5x + \frac{25}{3}$.
$f(2+h) \approx -5(2+h) + \frac{25}{3} \approx -5h - \frac{5}{3}$.

5) On a besoin de $f(2) = -\frac{5}{3}$ et $f(-2) = -\frac{97}{3}$
   a. $f(x) \in \left[-\frac{97}{3}; \frac{95}{48}\right]$
   b. f possède deux maximums locaux en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{3}{2}$ et un minimum local en 1.
   c. f possède un majorant atteint en $-\frac{1}{2}$ et un minorant atteint en -2.

Exercice 3

Chaque information fournie doit être traduite en terme de propriétés vérifiées par la fonction f. On résout ensuite un système d'équations.

- C_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20 : $f(0) = 20$ donc $\boxed{d = 20}$.
- C_f passe par le point $A(-1;18)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3 : $f(-1) = 18$ et $f'(-1) = 3$.

On doit donc exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
$f(-1) = 18$ donc $-a+b-c+20 = 18$ donc $\boxed{-a+b-c = -2}$.
$f'(-1) = 3$ donc $\boxed{3a-2b+c=3}$.

- C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 : $f'(0) = 0$. Donc $\boxed{c=0}$.

On est donc ramené au système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} -a+b=-2 \\ 3a-2b=3 \end{cases}$.
On résout soit par substitution, soit par combinaison linéaire pour trouver : $\begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$.
Finalement $\boxed{f: x \mapsto -x^3-3x^2+20}$.