Devoir maison n°6

Exercice 1

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x^2+1}$ avec a, b, c des réels.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère.

1) Sachant que la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 7x - 6$ et que la tangente T_{-2} à C_f au point d'abscisse -2 est parallèle à la droite Δ d'équation $308x + 25y + 102 = 0$, déterminer a, b et c.
2) Etudier les variations de la fonction f.
3) Tracer dans un repère C_f, T_1 et T_{-2}.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction $f: x \mapsto 4x^3 - 12x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$, α, β et γ telles que $-2 < \alpha < -1$; $-1 < \beta < 0$ et $1 < \gamma < 2$.
3) Donner une valeur approchée à 0,1 près de chacune des ces solutions.
4) *Dresser le tableau de signe de f.*

Partie B

On considère la fonction $g: x \mapsto x^4 - 6x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
2) Calculer $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$ et $g(2)$. En déduire que $g(\alpha) < 0$ et que $g(\gamma) < 0$.
3) En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2(x^2 - 6) - (x + 1)$, montrer que pour tout $x \in]-1; 0[$, $g(x) < 0$.
4) Déduire des questions précédentes le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune de ces solutions.

Exercice 3

En étudiant une fonction convenablement choisie, comparer :

$$A = \frac{2{,}014014014014}{(1{,}014014014014)^2 + 2{,}014014014014} \qquad B = \frac{2{,}014014014016}{(1{,}014014014016)^2 + 2{,}014014014016}$$