

## Correction devoir maison n°6

## Exercice 1

1)  $f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de la forme  $u + v$  avec  $u = ax^2 + b$  et  $v = \frac{c}{x^2+1}$ . On a  $u' = 2ax$  et pour dériver  $v$ , on utilise la forme  $\frac{1}{w}$  avec  $w = x^2 + 1$  et donc  $w' = 2x$ .

$$v' = c \times \left(\frac{1}{w}\right)' = c \left(-\frac{w'}{w^2}\right) = -\frac{2cx}{(x^2+1)^2}$$

Finalement : 
$$f'(x) = 2ax - \frac{2cx}{(x^2+1)^2}$$

$T_1$  a pour coefficient directeur 7 donc  $f'(1) = 7$ .

De plus cette tangente est tangente au point d'abscisse 1 donc le point de  $T_1$  d'abscisse 1 appartient aussi à  $C_f$  donc

$$f(1) = 7 - 6 = 1.$$

Par ailleurs,  $T_{-2}$  a un coefficient directeur égal au coefficient directeur de  $\Delta$ , dont l'équation, sous forme réduite est :

$$y = -\frac{308}{25}x - \frac{102}{25} \text{ donc } f'(-2) = -\frac{308}{25}.$$

Les trois relations trouvées s'écrivent :

$$\begin{cases} 2a - \frac{2c}{4} = 7 \\ a + b + \frac{c}{2} = 1 \\ -4a + \frac{4c}{25} = -\frac{308}{25} \end{cases} \text{ ou encore : } \begin{cases} 4a - c = 14 \\ 2a + 2b + c = 2 \\ -100a + 4c = -308 \end{cases}$$

On exprime  $c$  en fonction de  $a$  dans la première équation et on remplace dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} c = 4a - 14 \\ 2a + 2b + 4a - 14 = 2 \\ -100a + 16a - 56 = -308 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} c = 4a - 14 \\ 2b = -6a + 16 \\ a = 3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} c = -2 \\ b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

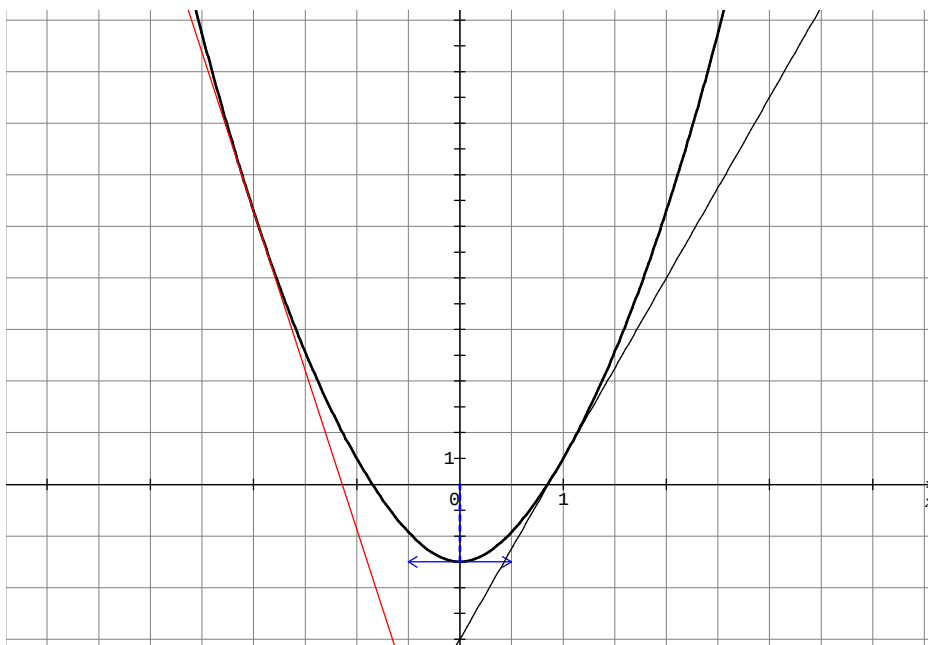
Finalement : 
$$f: x \mapsto 3x^2 - 1 - \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

2) Pour étudier les variations de  $f$ , on étudie le signe de  $f'(x)$  or  $f'(x) = 6x + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x \left[ 6 + \frac{4}{(x^2+1)^2} \right]$ .

Le crochet est clairement positif pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $x$ .

| $x$               | $-\infty$ | 0           | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|-------------|-----------|
| Signe de $f'(x)$  | -         | $\emptyset$ | +         |
| Variations de $f$ |           |             |           |

3)



## Exercice 2

### Partie A

1)  $f$  est un polynôme donc est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$

Pour étudier les variations de  $f$ , on étudie le signe de  $f'(x)$ .

Pour le signe de  $x^2 - 1$ , on peut soit utiliser la factorisation  $(x - 1)(x + 1)$  et le signe de chaque facteur, soit utiliser  $\Delta$ ... Dans tous les cas, on obtient :

| $x$               | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |    |   |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|----|---|
| Signe de $f'(x)$  |           | +    | 0   | -         | 0  | + |
| Variations de $f$ |           |      | 7   |           | -9 |   |

2) Sur  $] -\infty; -2]$  :  $f$  est croissante et  $f(-2) = -9$  donc pour tout  $x \in ] -\infty; -2]$ ,  $f(x) \leq -9 < 0$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solutions dans  $] -\infty; -2]$ .

Sur  $[-2; -1]$ ,  $f$  est monotone et  $f(-2) = -9$  et  $f(-1) = 7$  donc l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-2; -1]$ .

Sur  $[-1; 0]$ ,  $f$  est monotone et  $f(-1) = 7$  et  $f(0) = -1$  donc l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution  $\beta$  dans l'intervalle  $[-1; 0]$ .

Sur  $[0; 1]$ ,  $f$  est décroissante et  $f(0) = -1$  donc le maximum de  $f$  sur  $[0; 1]$  est  $-1$  et la fonction est strictement négative sur cet intervalle. Donc l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution dans  $[0; 1]$ .

Sur  $[1; 2]$ ,  $f$  est monotone et  $f(1) = -9$  et  $f(2) = 7$  donc l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution  $\gamma$  dans  $[1; 2]$ .

Sur  $[2; +\infty[$ ,  $f$  est croissante et  $f(2) = 7$  donc  $f$  admet un minimum sur  $[2; +\infty[$  qui vaut 7 donc la fonction  $f$  est strictement positive sur cet intervalle et l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solutions.

Au final, l'équation  $f(x) = 0$  a exactement trois solutions  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  avec  $-2 < \alpha < -1$  ;  $-1 < \beta < 0$  et  $1 < \gamma < 2$

3) Avec la calculatrice :

| $x$    | -1,7   | -1,6 | -0,1 | 0  | 1,7  | 1,8 |
|--------|--------|------|------|----|------|-----|
| $f(x)$ | -0,252 | 1,82 | 0,2  | -1 | -1,7 | 0,7 |

Donc  $\alpha \approx -1,7$  ;  $\beta \approx -0,1$  et  $\gamma \approx 1,8$

4) Grâce au tableau de variations de  $f$ , on a :

| $x$             | $-\infty$ |   | $\alpha$ |   | $\beta$ |   | $\gamma$ |   | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|---|----------|---|---------|---|----------|---|-----------|
| Signe de $f(x)$ |           | - | 0        | + | 0       | - | 0        | + |           |

### Partie B

1)  $g$  est un polynôme donc est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = 4x^3 - 12x - 1 = f(x)$ .

Pour étudier les variations de  $g$ , on utilise le signe de  $g'(x) = f(x)$  donc la question précédente :

| $x$               | $-\infty$ | $\alpha$                                                                            | $\beta$                                                                             | $\gamma$                                                                             | $+\infty$                                                                             |     |     |     |  |
|-------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|--|
| Signe de $g'(x)$  |           | $-$                                                                                 | $0$                                                                                 | $+$                                                                                  | $0$                                                                                   | $-$ | $0$ | $+$ |  |
| Variations de $g$ |           |  |  |  |  |     |     |     |  |

2)  $g(-2) = -9$  ;  $g(-1) = -5$  ;  $g(0) = -1$  et  $g(2) = -11$

$\alpha \in [-2; -1]$  or sur cet intervalle  $g$  admet un maximum en  $-2$  qui vaut  $-9$  donc  $g(\alpha) \leq -9 < 0$ .

$\gamma \in [0; 2]$  or sur cet intervalle  $g$  admet un maximum en 0 qui vaut  $-1$  donc  $g(\gamma) \leq -1 < 0$ .

3)  $x^2(x^2 - 6) - (x + 1) = x^4 - 6x^2 - x - 1 = g(x)$ .

Sur  $] -1; 0[$  :  $x^2 \in ]0; 1[$  et  $(x^2 - 6) \in ]-6; -5[$  donc  $x^2(x^2 - 6) < 0$ .

De plus  $(x + 1) \in ]0; 1[$  donc  $-(x + 1) < 0$ .

Finalement  $g(x)$  est la somme de deux termes strictement négatif donc est strictement négatif.

Comme  $\beta \in ]-1; 0[$ , on a  $g(\beta) < 0$ .

- 4) En utilisant le tableau de variations de  $g$  ainsi que les questions précédentes, on peut dire que l'équation  $g(x) = 0$  n'a aucune solution dans l'intervalle  $[-2; 2]$ .

Sur  $] - 3; -2]$  :  $g$  est monotone et  $g(-3) = 29$  et  $g(-2) = -9$  donc l'équation  $g(x) = 0$  a une solution  $x_0$  dans cet intervalle.

Sur  $] - \infty; -3]$ ,  $g$  est décroissante et son minimum est atteint en  $-3$  et vaut 29 donc l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solutions dans cet intervalle.

Sur  $[2; 3[$ ,  $g$  est monotone et  $g(3) = 23$  et  $g(2) = -11$  donc l'équation  $g(x) = 0$  a une solution  $x_1$  dans cet intervalle.

Sur  $[3; +\infty[$ ,  $g$  est croissante et son minimum est atteint en 3 et vaut 23 donc l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution dans cet intervalle.

Finalement l'équation  $g(x) = 0$  a deux solutions : une dans  $[-3; -2]$  et une dans  $[2; 3]$ .

Avec la calculatrice, on trouve :  $-2,4 < x_0 < -2,3$  et  $2,5 < x_1 < 2,6$

### Exercice 3

On considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2+x}$

$f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$  est définie pour  $x^2 - x + 1 \neq 0$  :  $\Delta = -3$  donc  $x^2 - x + 1 = 0$  n'a pas de solutions.

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u = x$  et  $v = x^2 - x + 1$  donc  $u' = 1$  et  $v' = 2x - 1$ .

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x^2 - x + 1) - (2x - 1) \times x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif donc  $f'(x)$  est du signe de  $-x^2 + 1$  donc du signe de  $a = -1$  sauf entre les racines  $-1$  et  $1$ .

| $x$               | $-\infty$ | $-1$                                                                                | $1$            | $+\infty$                                                                            |     |                                                                                       |
|-------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Signe de $f'(x)$  |           | $-$                                                                                 | $0$            | $+$                                                                                  | $0$ | $-$                                                                                   |
| Variations de $f$ |           |  | $-\frac{1}{3}$ |  | $1$ |  |

Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est donc décroissante.

Or  $A = f(2,014014014014)$  et  $B = f(2,014014014016)$ .

Comme  $2,014014014014 < 2,014014014016$  et que  $f$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ , on a :  $\boxed{A > B}$