# *Devoir maison n°9*

**Exercice 1**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto x - \sin(x)$.

1) Etudier la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
2) On considère maintenant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos(x)$.

Etudier la fonction $g$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

3) On considère maintenant la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x)$.

Etudier la fonction $h$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

4) On considère maintenant la fonction $j$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $j(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$.

Etudier la fonction $j$ et en déduire le signe de $j(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5) Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x \qquad et \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

**Exercice 2**

1) Calculer $4\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $4x^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$ puis $4x^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} > 0$ .
3) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ : $4\cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\cos(x) + \sqrt{6} = 0$ puis

$4\cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\cos(x) + \sqrt{6} > 0$ .

4) Résoudre dans $[0; \pi]$ : $4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \sqrt{6} = 0$.


# *Devoir maison n°9*

**Exercice 1**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto x - \sin(x)$.

1) Etudier la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
2) On considère maintenant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos(x)$.

Etudier la fonction $g$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

3) On considère maintenant la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x)$.

Etudier la fonction $h$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

4) On considère maintenant la fonction $j$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $j(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$.

Etudier la fonction $j$ et en déduire le signe de $j(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5) Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x \qquad et \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

**Exercice 2**

1) Calculer $4\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $4x^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$ puis $4x^2 - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} > 0$ .
3) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ : $4\cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\cos(x) + \sqrt{6} = 0$ puis

$4\cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\cos(x) + \sqrt{6} > 0$ .

4) Résoudre dans $[0; \pi]$ : $4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \sqrt{6} = 0$.