

Correction devoir maison n°9

Exercice 1

1) f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Elle est de la forme $u + v$ avec $u = x$ et $v = -\sin(x)$. On a donc $f'(x) = 1 - \cos(x)$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on utilise le fait que pour tout nombre x , on a $\cos(x) \leq 1$ donc $1 - \cos(x) \geq 0$. On a donc $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, comme $f(0) = 0$, le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ est 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) \geq 0$.

2) g est une fonction de la forme $u + v$ avec $u = -1 + \frac{x^2}{2}$ et $v = \cos(x)$ donc $u' = x$ et $v' = -\sin(x)$. g est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit : $g'(x) = x - \sin(x) = f(x) \geq 0$ d'après la question précédente.

Donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, comme $g(0) = -1 + 0 + 1 = 0$, le minimum de g sur $\mathbb{R}^+$ est 0 et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $g(x) \geq 0$.

3) h est de la forme $u + v$ avec $u = -x + \frac{x^3}{6}$ et $v = \sin(x)$ donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos(x) = g(x) \geq 0$ d'après la question précédente.

On en déduit que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus comme $h(0) = 0$, le minimum de h sur $\mathbb{R}^+$ est 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $h(x) \geq 0$.

4) j est de la forme $u + v$ avec $u = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et $v = -\cos(x)$ donc j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$j'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x) = h(x) \geq 0$ d'après la question précédente.

Donc la fonction j est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus comme $j(0) = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $j(x) \geq 0$.

5) Finalement, grâce aux questions 1 et 3, on a $x - \sin(x) \geq 0$ ce qui signifie $\sin(x) \leq x$ et $-x + \frac{x^3}{6} + \sin(x) \geq 0$ ce qui signifie $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Tout ceci donne donc : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

De la même façon, avec les questions 2 et 4, on trouve $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Exercice 2

1) $4(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 4(2 - 2\sqrt{6} + 3) = 20 - 8\sqrt{6}$.

2) L'équation est une équation de degré 2. On calcule donc le discriminant :

$$\Delta = (-2(\sqrt{2} + \sqrt{3}))^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{6} = 4(2 + 2\sqrt{6} + 3) - 16\sqrt{6} = 20 - 8\sqrt{6} = 4(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \text{ et on en déduit}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

en utilisant la question précédente. Donc $\Delta > 0$ et il y a deux solutions à l'équation :

$$x_1 = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{4(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{8} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{4(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{8} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc pour l'équation $4x^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$: $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

Pour l'inéquation, on utilise que le trinôme de degré 2 est du signe de $a = 4$ sauf entre les deux racines x_1 et x_2

$$\text{donc } S =]-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$$

3) On pose $X = \cos(x)$. L'équation à résoudre devient donc $4X^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})X + \sqrt{6} = 0$.

D'après la question précédente $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On doit donc résoudre $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.

$$\text{Finalement } S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

Pour l'inéquation, de la même manière, on doit avoir $X < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui revient à résoudre dans $[-\pi; \pi]$:
 $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{On trouve donc, grâce au cercle trigonométrique : } S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{4}; \pi \right]$$

4) On pose cette fois $X = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$. Comme à la question précédente, on trouve $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$, autrement dit, on doit résoudre $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; \pi]$.

Pour cela, on pose $y = \frac{\pi}{3} + 2x$.

Comme $x \in [0; \pi]$, on doit avoir $y \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$ et $\sin(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions pour y sont donc : $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$.

On est donc ramené à quatre équations : $\frac{\pi}{3} + 2x = \frac{\pi}{3}...$

$$\text{On trouve quatre solutions : } S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right\}$$