Correction devoir surveillé n°10

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \neq 0$ car c'est la somme de 2^n et $4n - 1$ qui sont strictement positifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2^{n+1} + 4(n+1) - 1}{2^n + 4n - 1} - 1 = \frac{2^{n+1} + 4n + 3 - 2^n - 4n + 1}{2^n + 4n - 1} = \frac{2^n(2-1) + 4}{2^n + 4n - 1} = \frac{2^n + 4}{2^n + 4n - 1}$$

Or $2^n + 4 > 0$ donc le numérateur est positif.

De même, $2^n > 0$ et $4n - 1 \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ est positif.

2) D'après ce qui précède, $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et en multipliant les deux termes de cette inégalité par $u_n > 0$, on trouve $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante

Exercice 2

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N} : -1 \leq \sin\left(\frac{5\pi}{12}n\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin\left(\frac{5\pi}{12}n\right) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3 - n \leq 3 \sin\left(\frac{5\pi}{12}n\right) \leq 3 - n$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3 - n}{4 + 2n} \leq u_n \leq \frac{3 - n}{4 + 2n}$$

car $4 + 2n > 0$ donc le sens de l'inégalité est conservé.

On note (v_n) la suite de terme général $v_n = \frac{-3-n}{4+2n}$ et (w_n) celle de terme général $w_n = \frac{3-n}{4+2n}$.

Alors v_n et w_n sont des formes rationnelles donc leurs limites sont égales aux limites du quotient de leurs termes de plus haut degré :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et sa limite est $-\frac{1}{2}$.

Exercice 3

On considère trois termes consécutifs u_0 , u_1 et u_2 d'une suite arithmétique de raison r .

Les hypothèses de l'énoncé donne : $u_0 + u_1 + u_2 = 105$; $u_0 u_1 u_2 = 42560$ et $r > 0$.

Par ailleurs : $u_0 = u_1 - r$ et $u_2 = u_1 + r$.

Nos deux conditions nous ramène au système :

$$\begin{cases} 3u_1 = 105 \\ (u_1 - r)u_1(u_1 + r) = 42560 \\ r > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 35 \\ 35^2 - r^2 = 1216 \\ r > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 35 \\ r^2 = 9 \\ r > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 35 \\ r = 3 \end{cases}$$

On en déduit $u_0 = 32$ et $u_2 = 38$.

Les trois termes sont donc $32 ; 35 ; 38$

Remarque : on pouvait aussi travailler à partir de u_0 au lieu de u_1 mais les calculs auraient été plus lourds. Il vaut toujours mieux privilégier un peu de symétrie...

Exercice 4

1) L_1 est l'aire du plan comprise entre les demi-cercles de diamètres 1 et 2. Notons respectivement c_1 et c_2 l'aire de ces demi-cercles.

L'aire d'un demi-cercle de diamètre d est : $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2\pi}{8}$.

$$c_1 = \frac{1^2\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{2^2\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad L_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

L_2 est l'aire de la partie comprise entre les demi-cercles de diamètres 2 et 3 :

$$c_3 = \frac{3^2\pi}{8} = \frac{9\pi}{8} \text{ d'où } L_2 = \frac{9\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{8}}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$: L_n est l'aire comprise entre les demi-cercles de diamètres n et $n+1$.

$$c_n = \frac{n^2\pi}{8} \text{ et } c_{n+1} = \frac{(n+1)^2\pi}{8} \text{ d'où } L_n = \frac{(n+1)^2\pi}{8} - \frac{n^2\pi}{8} = \frac{(n^2+2n+1-n^2)\pi}{8} = \frac{(2n+1)\pi}{8}$$

$$\text{Par ailleurs, } L_{n+1} - L_n = \frac{(2(n+1)+1)\pi}{8} - \frac{(2n+1)\pi}{8} = \frac{(2n+3-2n-1)\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Le résultat ne dépend pas de n donc $\boxed{\text{la suite } (L_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{\pi}{4}}$.

3) On utilise les formules des suites arithmétiques : $L_n = L_1 + (n-1)r = \frac{3\pi}{8} + \frac{(n-1)\pi}{4} = \frac{3\pi+2n\pi-2\pi}{8}$ et donc

$$\boxed{L_n = \frac{(2n+1)\pi}{8}}$$

4) $L_1 + L_2 + \dots + L_n$ est la somme des termes de la suite arithmétique (L_n) donc, en notant S cette somme :

$$S = \frac{L_1+L_n}{2} \times n = \frac{\frac{3\pi}{8} + \frac{(2n+1)\pi}{8}}{2} \times n = \frac{(2n+4)\pi}{16} \times n = \boxed{\frac{(n+2)n\pi}{8}}$$

Par ailleurs, on peut observer que la somme $L_1 + L_2 + \dots + L_n$ correspond à l'aire du domaine délimité par le demi-cercle de diamètre $n+1$ et le demi-cercle de diamètre 1.

On trouve alors : $S = \frac{(n+1)^2\pi}{8} - \frac{1^2\pi}{8} = \frac{(n^2+2n+1-1)\pi}{8} = \boxed{\frac{n(n+2)\pi}{8}}$ On retrouve bien la même expression de la somme...

Exercice 5

$$1) u_1 = \frac{3}{5}u_0 + 1 = \frac{3}{5} \times 2 + 1 = \boxed{\frac{11}{5}} \text{ et } u_2 = \frac{3}{5} \times \frac{11}{5} + 1 = \boxed{\frac{58}{25}}$$

$$2) u_1 - u_0 = \frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5} \text{ et } u_2 - u_1 = \frac{58}{25} - \frac{11}{5} = \frac{3}{25} \text{ donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{11}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{10} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{58}{25} \times \frac{5}{11} = \frac{58}{55} \text{ donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$$

$$3) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{5}{2}$$

$$a. v_0 = 2 - \frac{5}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}; v_1 = \frac{11}{5} - \frac{5}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}; v_2 = \frac{58}{25} - \frac{5}{2} = \boxed{-\frac{9}{2}}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{5}u_n + 1\right) - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}u_n + 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}u_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}\left(u_n - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{5}v_n$$

Comme cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{3}{5}}$.

$$c. \text{ En utilisant les formules des suites géométriques : } v_n = v_0 q^n = \boxed{-\frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$d. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} : u_n = v_n + \frac{5}{2} \text{ donc } \boxed{u_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

4) (v_n) est une suite géométrique donc la raison est strictement comprise entre -1 et 1 donc (v_n) converge vers 0. Or $u_n = v_n + \frac{5}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \frac{5}{2}}$

$$5) S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

a. En utilisant l'expression trouvée aux questions précédentes, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^0\right] + \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^1\right] + \dots + \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

On constate que le terme $\frac{5}{2}$ se retrouve autant de fois qu'il y a de termes dans la somme, autrement dit $(n+1)$ fois.

Pour le reste, il s'agit de la somme des termes de la suite géométrique (v_n) d'où

$$S_n = \frac{5}{2}(n+1) + \frac{v_{n+1}-v_0}{\frac{3}{5}-1} = \frac{5}{2}(n+1) + \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{-\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{5}{2}(n+1) + \frac{5}{4} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

b. Pour la convergence de (S_n) , on peut utiliser la forme $S_n = \frac{5}{2}(n+1) + \frac{v_{n+1}-v_0}{\frac{3}{5}-1}$

En effet, le premier terme diverge et a pour limite $+\infty$ alors que le second terme converge car v_{n+1} converge vers 0. Par addition, $\boxed{(S_n) \text{ diverge et a pour limite } +\infty}$.