Correction devoir surveillé n°1

Exercice 1

a) f est un polynôme de degré 3.
b) $g(x) = 9x^2 + 12x + 2 + 4x - 9x^2 = 16x + 2$; c'est un polynôme de degré 1.
c) 0 est valeur interdite, donc h n'est pas un polynôme.

Exercice 2

a) $\Delta = 1$ donc l'équation a deux solutions : $\boxed{S = \{5; 6\}}$.

b) Pour tout $x \notin \{0; 1\}$ (ce sont les valeurs interdites), on a $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{3x^2-1}{x(x-1)}$ équivalente à $\frac{2x+3(x-1)}{x(x-1)} - \frac{3x^2-1}{x(x-1)} = 0$.

Cette équation se ramène à $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ (le numérateur est nul).

$\Delta = 1$ donc l'équation admet deux solutions : $\frac{2}{3}$ et 1.

Or 1 est une valeur interdite donc finalement, $\boxed{S = \{\frac{2}{3}\}}$.

c) L'inéquation est équivalente à $4x^2 - 3x + 1 \leq 0$. On calcule alors $\Delta = -7$ et $4x^2 - 3x + 1$ est toujours strictement du signe de $a = 4$ et n'est jamais négatif. D'où $\boxed{S = \emptyset}$

d) On résout l'inéquation dans $\mathbb{R} - \{-3\}$. Elle est équivalente à $\frac{4x^2+9x-9}{x+3} - \frac{(x+1)(x+3)}{x+3} \leq 0$ ou encore $\frac{3x^2+5x-12}{x+3} \leq 0$.

Pour le signe du numérateur : $\Delta = 169$ donc $3x^2 + 5x - 12$ est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-5+13}{6} = \frac{4}{3}$ et $x_2 = \frac{-5-13}{6} = -3$.

Pour le signe du dénominateur, la valeur annulante est -3.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2 + 5x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{3x^2+5x-12}{x+3}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

Finalement $\boxed{S =]-\infty; -3[\cup \left]-3; \frac{4}{3}\right]}$

Exercice 3

1) On trace la courbe de P dans un repère.
   a. L'équation $P(x) = 0$ semble avoir trois solutions.
   b. -2 est une racine entière de P.
   c. P se factorise donc par $x + 2$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x + 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (2a + b)x^2 + (2b + c)x + 2c$.

Par identification, on obtient le système : $\begin{cases} a = 8 \\ 2a + b = 18 \\ 2b + c = 1 \\ 2c = -6 \end{cases}$ d'où on en déduit : $\begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$.

Finalement $P(x) = (x + 2)(8x^2 + 2x - 3)$.

3) P est maintenant sous forme factorisée. Sachant que si un produit est nul alors un des facteurs est nul, on doit résoudre $x + 2 = 0$ et $8x^2 + 2x - 3 = 0$.

La première équation donne $x = -2$.

Pour la seconde, on calcule le discriminant : $\Delta = 100$ puis les deux solutions : $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{4}$. Finalement $\boxed{S = \{-2 \colon -\frac{3}{4} ; \frac{1}{2}\}}$.

Exercice 4

1) La fonction f est un polynôme de degré 2 avec $a = -1 < 0$ donc sa courbe représentative est une parabole tournée vers le bas et dont le sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

En effet $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) Pour étudier la position relative des courbes de f et g, on doit étudier le signe de

$f(x) - g(x) = -x^2 - x - 4x^2 + 5x + 9 = -5x^2 + 4x + 9$

Le discriminant est $\Delta = 196$ et donc $-5x^2 + 4x + 9$ est du signe de $a = -5$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-4+14}{-10} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-14}{-10} = 2{,}4$.

x	$-\infty$		-1		$2{,}4$		$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc sur $]-\infty; -1] \cup [2{,}4 ;\ +\infty[$, la courbe de g est au dessus de la courbe de f et sur $[-1; 2{,}4]$ la courbe de f est au dessus de la courbe de g.