Correction Devoir surveillé n°2

Exercice 1

On considère deux nombres x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$. Comme f est croissante sur I, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
Comme $k < 0$ et que la multiplication par un nombre négatif inverse le sens des inégalités, on a $kf(x_1) > kf(x_2)$
Ce qui signifie que $\boxed{\text{la fonction } kf \text{ est décroissante sur } I.}$

Exercice 2

1) f est la composée de $g: x \mapsto 5 - 2x$ et de la fonction $h: x \mapsto x^2$ avec $f = h \circ g$.
2) g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
3) Sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$, g est décroissante. Ses images appartiennent à $[0; +\infty[$. Sur cet intervalle, la fonction h est croissante. Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]}$.

Exercice 3

1) f est définie si $x^2 + 2x + 2 \neq 0$. Or $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$ donc le polynôme $x^2 + 2x + 2$ n'a pas de racines et $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
2) A l'aide de la calculatrice, il semble que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f. Pour démontrer la conjecture, calculons : $f(-1 + x) - f(-1 - x)$:

$$f(-1+x) - f(-1-x) = \frac{1}{(-1+x)^2+2(-1+x)+2} - \frac{1}{(-1-x)^2+2(-1-x)+2} = \frac{1}{1-2x+x^2-2+2x+2} - \frac{1}{1+2x+x^2-2-2x+2}$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc la $\boxed{\text{droite d'équation } x = -1 \text{ est bien un axe de symétrie de la courbe } C_f.}$

Exercice 4

1) Il faut $x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$ ce qui signifie : $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 1 \leq 2$

Cette inéquation devient $x^2 \leq 1$ et donc $D_{v \circ u} = [-1; 1]$.

2) Pour tout $x \in [-1; 1]$: $v \circ u(x) = v(x^2 + 1) = \sqrt{2 - (x^2 + 1)} = \sqrt{1 - x^2}$.
3) En utilisant la calculatrice, on a :

x	-1		0		1
Variations de $v \circ u$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) Pour $x \in [-1; 0]$: la fonction u est décroissante sur $[-1; 0]$ et ses images appartiennent à $[1; 2]$.

La fonction v est décroissante sur $[1; 2]$ en tant que composée de la fonction $x \mapsto 2 - x$ décroissante suivie de la fonction racine carrée qui est croissante.
Donc $v \circ u$ est croissante sur $[-1; 0]$.
De la même manière sur $[0; 1]$, u est croissante et ses images appartiennent à $[1; 2]$. La fonction v est décroissante sur $[1; 2]$ et donc $v \circ u$ est décroissante sur $[0; 1]$.

Exercice 5

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, on a $g(x + 3) + 2 = \frac{1}{x+3} + 2 = \frac{1+2x+6}{x+3} = \frac{2x+7}{x+3} = f(x)$.
2) On obtient la courbe de $x \mapsto g(x + 3)$ en translatant la courbe de g par le vecteur $-3\vec{\imath}$.

Donc la courbe de $f: x \mapsto g(x + 3) + 2$ est l'image de la courbe de g par la translation de vecteur $-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

3) Comme la fonction g est impaire, sa courbe est symétrique par rapport au centre du repère O. Son image par la translation de vecteur $-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ est donc symétrique par rapport au point $A(-3; 2)$.