Correction devoir surveillé n°4

Exercice 1

1) Le point A a pour coordonnées $(-1;-1)$ donc $\boxed{f(-1)=-1}$.

   Le point B a pour coordonnées $(2;5)$ donc $\boxed{f(2)=5}$.

2) La tangente à la courbe de f au point A a pour coefficient directeur -4 donc $\boxed{f'(-1)=-4}$.

   La tangente à la courbe de f au point B a pour coefficient directeur -1 donc $\boxed{f'(2)=-1}$.

3) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ donc en remplaçant par les valeurs précédentes : $y=-(x-2)+5$ et donc $\boxed{y=-x+7}$.

4) $f(2+h)\approx-(2+h)+7$ donc $\boxed{f(2+h)\approx 5-h}$.

5) On utilise la formule précédente avec $h=0{,}003$ et on obtient : $\boxed{f(2{,}003)\approx 4{,}997}$

Exercice 2

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\cos x\times\cos x$ donc f est de la forme uv avec $u=\cos x$ et $v=\cos x$ donc $u'=v'=-\sin x$.

$f'(x)=u'v+uv'=(-\sin x)\cos x+\cos x\times(-\sin x)$ et donc $\boxed{f'(x)=-2\cos x\sin x}$

2) Pour tout $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$, g est de la forme $u(ax+b)$ avec $u=\sqrt{x}$ et donc $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $ax+b=-2x+3$.

Donc : $g'(x)=a\times u'(ax+b)=-2\times\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}$ d'où $\boxed{g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{3-2x}}}$

Exercice 3

1) On doit calculer $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Commençons par $f(a+h)$:

$f(a+h)=2(a+h)^3-6(a+h)=2(a+h)(a^2+2ah+h^2)-6a-6h$

$f(a+h)=2a^3+6a^2h+6ah^2+2h^2-6a-6h$

Par ailleurs $f(a)=2a^3-6a$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2a^3+6a^2h+6ah^2+2h^2-6a-6h-2a^3+6a}{h}$$

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=6a^2+6ah+2h-6}$$

Quand h prend des valeurs très proches de 0, alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ prend des valeurs très proches de $6a^2-6$ donc f est dérivable en a pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(a)=6a^2-6}$

2) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ donc

$y=(6a^2-6)(x-a)+2a^3-6a=(6a^2-6)x-6a^3+6a+2a^2-6a$

Et finalement l'équation est : $\boxed{y=(6a^2-6)x-4a^3}$

3) T_a est parallèle à la droite d'équation $y=18x-2$ si son coefficient directeur est égal à 18.

   On doit donc résoudre $6a^2-6=18$.

En simplifiant par 6, cela revient à résoudre $a^2 - 1 = 3$ ou encore $a^2 = 4$.
Cette équation a deux solutions : $a = 2$ et $a = -2$.
$\boxed{\text{Les tangentes à la courbe de } f \text{ parallèles à la droite d'équation } y = 18x - 2 \text{ sont donc } T_2 \text{ et } T_{-2}}$.

4) La tangente T_a à la courbe de f passe par $A(0; 4)$ si les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a donc si : $4 = (6a^2 - 6) \times 0 - 4a^3$, autrement dit si $4 = -4a^3$.

Cette équation est équivalente à $a^3 = -1$ et donc $a = -1$.
$\boxed{\text{La seule tangente à } C_f \text{ passant par } A(0;4) \text{ est } T_{-1}}$.

Exercice 4

1) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = ax^2 + bx + c$ et $v = x + 1$ donc $u' = 2ax + b$ et $v' = 1$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx + c)}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2ax^2 + 2ax + bx + b - ax^2 - bx - c}{(x + 1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{ax^2 + 2ax + b - c}{(x + 1)^2}}$$

2) L'image de 0 par f est 2 donc $f(0) = 2$ ou encore : $\boxed{c = 2}$.

La courbe de f passe par le point $A(-2; -2)$ donc $f(-2) = -2$ ou encore : $\frac{4a-2b+2}{-1} = -2$ ce qui se simplifie pour donner : $4a - 2b = 0$ ou encore : $\boxed{a = \frac{b}{2}}$.
La tangente à C_f au point d'abscisse -2 est horizontale donc son coefficient directeur est nul : $f'(-2) = 0$ ou encore : $\frac{4a-4a+b-2}{(-1)^2} = 0$ ce qui donne $\boxed{b = 2}$
Finalement : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 2$ donc pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $\boxed{f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}}$