Correction devoir surveillé n°5

Exercice 1

1) La fonction f est une fonction polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 16x^3 - 6x + 2$ donc $f'(-2) = 16 \times (-8) - 6 \times (-2) + 2 = -114$

De plus $f(-2) = 4 \times 16 - 3 \times 4 + 2 \times (-2) - 3 = 45$

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 est : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

Soit en remplaçant et en développant : $\boxed{y = -114x - 183}$

2) $f(-2+h) \approx f'(-2)h + f(-2)$ donc $\boxed{f(-2+h) \approx -114h + 45}$

3) $f(-2{,}001) = f(-2 - 0{,}001) \approx -114 \times (-0{,}001) + 45$ et donc $\boxed{f(-2{,}001) \approx 45{,}114}$

On pouvait également faire le calcul avec l'équation de la tangente : $f(-2{,}001) \approx -114 \times (-2{,}001) - 183$…

Exercice 2

Deux méthodes étaient envisageables : soit l'étude de la fonction f sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{1}{3}\right]$, soit le calcul direct avec justifications…

1ère méthode : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $\left[-2; -\frac{1}{3}\right]$.

$x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v = x - 1$ donc la dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Finalement $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est donc clairement négative sur $\left[-2; -\frac{1}{3}\right]$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

Comme $-2 \leq x \leq -\frac{1}{3}$, on obtient : $f(-2) \geq f(x) \geq f\left(-\frac{1}{3}\right)$ ou encore $\boxed{-1 \geq f(x) \geq -\frac{9}{4}}$

2ème méthode : $-2 \leq x \leq -\frac{1}{3}$

On soustrait 1 à chaque membre : $-3 \leq x - 1 \leq -\frac{4}{3}$ (les inégalités sont inchangées)

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$, on a $-\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-1} \geq -\frac{3}{4}$

Finalement, on multiplie par 3 chaque membre pour obtenir : $-1 \geq f(x) \geq -\frac{9}{4}$

Exercice 3

La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres x tels que $(2-m)x + 3 \neq 0$, autrement dit, si $m = 2$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $m \neq 2$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2-m}\right\}$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = mx + 1$ et $v = (2-m)x + 3$ donc $u' = m$ et $v' = 2 - m$.

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \cdots = \frac{4m-2}{[(2-m)x+3]^2}$

L'énoncé indique que $f'(-1) = -2$ donc on doit résoudre : $\frac{4m-2}{[(2-m)\times(-1)+3]^2} = -2$

Donc : $(4m - 2) = -2(m+1)^2$ soit encore en développant : $2m^2 + 8m = 0$.

Pour résoudre cela, on peut utiliser Δ ou factoriser : $2m(m+4) = 0$ et on utilise la règle du produit nul.

Finalement, on trouve deux valeurs possibles pour m : $\boxed{m \in \{0\,; -4\}}$

Exercice 4

Calculons l'équation de la tangente T_{-1} à la courbe de f au point d'abscisse -1 :

f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$ et donc $f'(-1) = 1$ et $f(-1) = 0$.

L'équation est donc $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = x + 1$.

On cherche les points tels que $f'(x) = 1$, autrement dit les abscisses des points de C où la tangente est parallèle à T_{-1} . Cela revient à résoudre $-4x^3 + 4x = 1 = 1$ ou encore $-4x(x^2 - 1) = 0$.
Cette équation a trois solutions : 0 ; 1 et -1.
Equation de la tangente en 0 : $y = f'(0)x + f(0) = x$.
T_0 et T_{-1} n'ont donc pas la même équation.
Equation de la tangente en 1 : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1 + 2 = x + 1$.
Les équations de T_{-1} et de T_1 correspondent donc la tangente à C au point d'abscisse -1 est également tangente à C au point d'abscisse 1 .

Exercice 5

1) Pour calculer le volume d'un cône, nous avons besoin du rayon du cercle de base ainsi que de la hauteur.

Or la hauteur est égale à $SO' = SO + OO' = x + R$.
Par ailleurs, dans le triangle $OO'A$, rectangle en O', on peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver : $OA^2 = OO'^2 + O'A^2$ et donc $O'A^2 = R^2 - x^2$.
On trouve donc : $V = \frac{1}{3}\pi O'A^2 \times h = \frac{\pi}{3}(R^2 - x^2)(R + x)$.

2) On peut développer cette expression pour obtenir : $V(x) = \frac{\pi}{3}(R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3)$.

La fonction V est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2Rx - 3x^2)$$

$\frac{\pi}{3}$ est clairement positif, donc $V'(x)$ est du signe de $-3x^2 - 2Rx + R^2$.
Pour déterminer ce signe, on calcule $\Delta = 4R^2 + 12R^2 = 16R^2 > 0$
Donc $V'(x)$ est du signe de $a = -3$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{2R+4R}{-6} = -R$ et $x_2 = \frac{2R-4R}{-6} = \frac{R}{3}$.

x	0		$\frac{R}{3}$		R
Signe de $V'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de V		$\nearrow$		$\searrow$	

Le volume du cône est donc maximal pour $x = \frac{R}{3}$.

Exercice 6

1) g est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $g'(x) = 3x^2 - 3$ qui est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines 1 et -1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	10	$\searrow$	6	$\nearrow$	

b. Sur $]-\infty; -3]$: g est strictement croissante et $g(-3) = -10$ donc le maximum de g est -10 et $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[-3; -2]$, g est strictement croissante, $g(-3) = -10$ et $g(-2) = 6$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $[-3; -2]$.
Sur $[-2; +\infty[$, g n'est pas monotone mais admet un minimum égal à 6 atteint deux fois (en -2 et en 1) donc g sera strictement positive et l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
Finalement, $g(x) = 0$ a une unique solution x_0 et $x_0 \in [-3; -2]$.

c. $g(-2{,}5) \approx -0{,}125$ et $g(-2{,}4) \approx 1{,}38$ donc $-2{,}5 < x_0 < -2{,}4$
$g(-2{,}5) \approx -0{,}125$ e t$g(-2{,}49) \approx 0{,}032$ donc $-2{,}5 < x_0 < -2{,}49$

d. On peut déduire : sur $]-\infty; x_0]$, g est négative et sur $[x_0; +\infty[$, g est positive.

2)

a. f est définie si $x^2 - 1 \neq 0$. Autrement dit si $x \neq 1$ et si $x \neq -1$. On a donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

b. $ax + \frac{bx+c}{x^2-1} = \frac{ax(x^2-1)+bx+c}{x^2-1} = \frac{ax^3+(b-a)x+c}{x^2-1}$

Par identification avec l'expression de f, on trouve le système : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c = -4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$

Finalement $f(x) = x + \frac{x-4}{(x^2-1)}$

c. Pour déterminer la position relative de C_f et de la droite D, on doit déterminer le signe de $f(x) - x$.

Or $f(x) - x = \frac{x-4}{x^2-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
Signe de $x - 4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f(x) - x$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc sur $]-\infty; -1[\cup]1; 4]$, la courbe de f est au dessous la droite D.
Et sur $]-1; 1[\cup [4; +\infty[$, la courbe de f est au dessus de la droite D.

d. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = x^3 - 4$ et $v = x^2 - 1$ donc $u' = 3x^2$ et $v' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

e. Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

On déduit des questions précédentes le tableau de variations :

x	$-\infty$		x_0		-1		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
Variations de f		↗		↘	‖	↘	4	↗	‖	↗	

f. On veut montrer que $f(x_0) = \frac{3}{2}x_0$, autrement dit que $f(x_0) - \frac{3}{2}x_0 = 0$.

Pour rappel, x_0 est la solution de $g(x) = 0$ donc $x_0^3 - 3x_0 + 8 = 0$.

$$f(x_0) - \frac{3}{2}x_0 = \frac{x_0^3 - 4}{x_0^2 - 1} - \frac{3x_0}{2} = \frac{2(x_0^3 - 4) - 3x_0(x_0^2 - 1)}{x_0^2 - 1} = \frac{2x_0^3 - 8 - 3x_0^3 + 3x_0}{x_0^2 - 1} = \frac{-x_0^3 + 3x_0 - 8}{x_0^2 - 1} = 0$$

Car le dénominateur est nul…