

Correction devoir surveillé n°6

Exercice 1

- $(\vec{u}; 2\vec{v}) + (-\vec{u}; -3\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; 3\vec{v}) \quad (2\pi)$ donc $(\vec{u}; 2\vec{v}) + (-\vec{u}; -3\vec{v}) = 2\alpha \quad (2\pi)$
- $(\vec{v}; -2\vec{u}) + 2(\vec{u}; \vec{v}) = -(-2\vec{u}; \vec{v}) + 2\alpha \quad (2\pi)$ or $(-2\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad (2\pi)$ donc

$$(\vec{v}; -2\vec{u}) + 2(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha - \pi \quad (2\pi)$$

- $(3\vec{u}; -2\vec{v}) - 2(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi - 2(\vec{u}; \vec{v}) \quad (2\pi)$ donc $(3\vec{u}; -2\vec{v}) - 2(-\vec{u}; -\vec{v}) = \pi - \alpha \quad (2\pi)$

Exercice 2

$$1) \quad \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 5\pi}{10} = -\frac{4\pi}{10} = -\frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{5}$$

2) On utilise le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout nombre réel x .

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \boxed{2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} \end{aligned}$$

Exercice 3

On pose $X = \frac{\pi}{4} + 2x$. Comme $x \in [-\pi; \pi]$, on doit avoir $X \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

On doit alors résoudre $-\sqrt{3} \cos X = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Comme $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$, on a donc $\cos(X) = -\frac{1}{2}$.

Dans l'intervalle considéré, les seules valeurs possibles pour X sont : $-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Les valeurs de x correspondantes, et donc les solutions de l'équation sont : $S = \left\{-\frac{19\pi}{24}; -\frac{11\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}\right\}$

Exercice 4

$$1) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ce qui correspond à } \theta = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Les coordonnées polaires de A sont donc $\left(2\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3}\right)$

$$2) \quad x_B = r \cos(\theta) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_B = r \sin(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{B\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

3) On peut, au choix, calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ pour démontrer qu'ils sont ou ne sont pas colinéaires et on peut aussi raisonner avec les angles orientés :

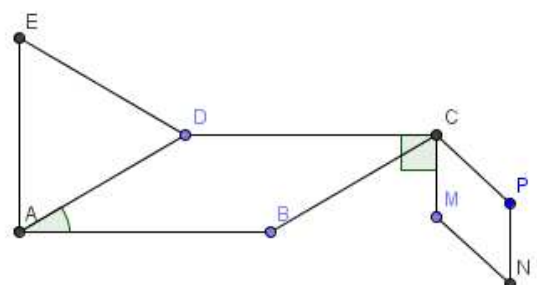
$(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{OA}; \vec{i}) + (\vec{i}; \vec{OB}) \quad (2\pi)$ d'après la relation de Chasles. Et comme $(\vec{OA}; \vec{i}) = -(\vec{i}; \vec{OA}) \quad (2\pi)$, on trouve : $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi \quad (2\pi)$. Finalement, les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires de sens contraires donc les points O, A et B sont alignés et O appartient à la droite (AB) .

Exercice 5

1) Voici la figure :

2) $(\vec{AE}; \vec{AB}) = (\vec{AE}; \vec{AD}) + (\vec{AD}; \vec{AB}) \quad (2\pi)$ grâce à la relation de Chasles.

Or $(\vec{AE}; \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ car ADE est un triangle équilatéral



direct et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6} (2\pi)$ d'après l'énoncé.

Donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

Dans un parallélogramme, la somme de deux angles consécutifs est égale à π car la somme des quatre angles est 2π et les angles opposés sont égaux. Comme, de plus, $ABCD$ est un parallélogramme direct, on a $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{6} (2\pi)$

3) $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{NP}) (2\pi)$ grâce à la relation de Chasles.

Par ailleurs : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \pi (2\pi)$ car les deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires car $ABCD$ est un parallélogramme. De même, dans le parallélogramme $CMNP$, $(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{NP}) = \pi (2\pi)$.

On a donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{NP}) = -\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} + \pi (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{NP}) = 0 (2\pi)$ et les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires de même sens.

Exercice 6

1) L'équation est équivalent à $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Les solutions dans $[0; 2\pi]$ sont : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

L'inéquation est équivalent à $\sin(x) < \frac{1}{2}$. On a donc, grâce au cercle trigonométrique : $S = \left[0; \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}; 2\pi \right]$

2) f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 2\pi]$.

a. $f'(x) = -2 \sin(x) + 1$

b. Le signe de $f'(x)$ a été étudié à la question précédente, il ne reste donc plus qu'à faire le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations de f	2	$\nearrow$	$\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6}$	$\nearrow$ $2 + 2\pi$