Devoir surveillé n°7 Sujet A

Exercice 1

Calculer la limite de la fonction f en a.

1) $f(x)=\frac{4x^3-2x}{3x(1-x)}$ avec $a=+\infty$
2) $f(x)=\frac{2x^2+2x-12}{x-2}$ avec $a=2$
3) $f(x)=\frac{5x^4-1}{(3x+3)^2}$ avec $a=-1$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\frac{-x^2+5x-8}{x-2}$ et sa courbe C_f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) Calculer la limite à droite de la fonction f en 2. Que peut-on en déduire pour C_f ?
3) Montrer que la droite Δ d'équation $y=-x+3$ est une asymptote oblique à la C_f en $+\infty$. Etudier la position relative de C_f et Δ sur $]2;+\infty[$.
4) Montrer que le point $A(2;1)$ est un centre de symétrie de C_f.
5) A l'aide des questions précédentes, déterminer sans calcul (mais avec explications !) la limite de f en $-\infty$, la limite à gauche de f en 2 ainsi que la position relative de C_f et Δ sur $]-\infty;2[$.

Exercice 3

On considère une fonction $f: x\mapsto\frac{ax^2+bx+c}{(x+d)^2}$ avec a,b,c et $d\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$.

Déterminer a,b,c et d tels que :

- La droite d'équation $y=1$ soit une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $x=-1$ soit une asymptote verticale à la courbe de f.
- La courbe de f passe par le point $A(1;0)$.
- La tangente à la courbe de f en A a pour coefficient directeur -2.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x)=(x^2-5x)\sqrt{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on notera D_f.
2) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
3) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
4) Donner l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.
5) En déduire le tableau de variations de f.
6) Calculer le taux de variation de f entre 0 et $0+h$. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
7) Déterminer l'équation de T_0, tangente à C_f au point d'abscisse 0.
8) Déterminer l'équation de T_1, tangente à C_f au point d'abscisse 1.
9) Dans un même repère, tracer T_0, T_1 et C_f.
10) *(plus difficile)* On considère l'équation $x^3-5x^2-m\sqrt{x}=0$.
    Déterminer, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de cette équation.

Devoir surveillé n°7 Sujet B

Exercice 1

Calculer la limite de la fonction f en a.

1) $f(x) = \frac{3x(x-1)}{2x-4x^3}$ avec $a = -\infty$
2) $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x+2}$ avec $a = -2$
3) $f(x) = \frac{1-5x^4}{(3x+3)^2}$ avec $a = -1$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \frac{-x^2+5x-8}{x-3}$ et sa courbe C_f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) Calculer la limite à droite de la fonction f en 3. Que peut-on en déduire pour C_f ?
3) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la C_f en $+\infty$. Etudier la position relative de C_f et Δ sur $]3; +\infty[$.
4) Montrer que le point $A(3; -1)$ est un centre de symétrie de C_f.
5) A l'aide des questions précédentes, déterminer sans calcul (mais avec explications !) la limite de f en $-\infty$, la limite à gauche de f en 3 ainsi que la position relative de C_f et Δ sur $]-\infty; 3[$.

Exercice 3

On considère une fonction $f: x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{(x+d)^2}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Déterminer a, b, c et d tels que :

- La droite d'équation $y = 1$ soit une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $x = -2$ soit une asymptote verticale à la courbe de f.
- La courbe de f passe par le point $A(1; 0)$.
- La tangente à la courbe de f en A a pour coefficient directeur 2.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = (5x - x^2)\sqrt{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on notera D_f.
2) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
3) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
4) Donner l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.
5) En déduire le tableau de variations de f.
6) Calculer le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
7) Déterminer l'équation de T_0, tangente à C_f au point d'abscisse 0.
8) Déterminer l'équation de T_1, tangente à C_f au point d'abscisse 1.
9) Dans un même repère, tracer T_0, T_1 et C_f.
10) *(plus difficile)* On considère l'équation $x^3 - 5x^2 + m\sqrt{x} = 0$.
    Déterminer, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de cette équation.