Correction devoir surveillé n°7 Sujet A

Exercice 1

1) La fonction f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4x}{3} = -\infty$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

2) 2 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f. On observe que 2 est aussi une racine du numérateur car $2 \times 2^2 + 2 \times 2 - 12 = 0$. Donc, $2x^2 + 2x - 12$ est factorisable par $(x-2)$. On cherche alors a et b tels que $2x^2 + 2x - 12 = (x-2)(ax+b)$.

On développe le membre de droite : $ax^2 + (b-2a)x - 2b$.

Par identification, on trouve : $\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = 2 \\ -2b = -12 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$.

Finalement, $2x^2 + 2x - 12 = (x-2)(2x+6)$.

Reprenons la fonction f : $f(x) = \frac{2x^2+2x-12}{x-2} = \frac{(x-2)(2x+6)}{x-2} = 2x + 6$.

On a donc $\boxed{\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} 2x + 6 = 10}$.

3) $\begin{cases} \lim_{x\to-1} 5x^4 - 1 = 4 \\ \lim_{x\to-1} (3x+3)^2 = 0^+ \end{cases}$ donc par division, $\boxed{\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty}$

Exercice 2

1) f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$. On a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2) $\begin{cases} \lim_{x\to2;x>2} -x^2 + 5x - 8 = -2^2 + 5 \times 2 - 8 = -2 \\ \lim_{x\to2;x>2} x - 2 = 0^+ \end{cases}$ donc par division, $\boxed{\lim_{x\to2;x>2} f(x) = -\infty}$

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe de la fonction } f \text{ admet la droite d'équation } x = 2 \text{ comme asymptote verticale.}}$

3) $f(x) - (-x+3) = \frac{(-x^2+5x-8)-(x-2)(-x+3)}{x-2} = \frac{-x^2+5x-8+x^2-3x-2x+6}{x-2} = -\frac{2}{x-2}$.

Or $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -2 = -2 \\ \lim_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty \end{cases}$ donc par division, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x-2} = 0$.

Ceci démontre que $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est bien une asymptote oblique à } C_f \text{ en } +\infty.}$

Pour étudier la position relative de C_f et Δ, on doit étudier le signe de $f(x) - (-x+3) = -\frac{2}{(x-2)}$.

Or, sur $]2;+\infty[$, $x - 2 > 0$ et donc $-\frac{2}{x-2} < 0$. Ceci montre que $\boxed{C_f \text{ est au dessous de } \Delta \text{ sur }]2;+\infty[}$.

4) On doit montrer que $\frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} = 1$.

$$
\begin{aligned}
f(2+x) + f(2-x) &= \frac{-(2+x)^2 + 5(2+x) - 8}{2+x-2} + \frac{-(2-x)^2 + 5(2-x) - 8}{2-x-2} \\
&= \frac{-4 - 4x - x^2 + 10 + 5x - 8}{x} + \frac{-4 + 4x - x^2 + 10 - 5x - 8}{-x} \\
&= \frac{-x^2 + x - 2}{x} - \frac{-x^2 - x - 2}{x} = \frac{2x}{x} = 2
\end{aligned}
$$

Donc $\frac{f(2+x)+f(2-x)}{2} = 1$ et $\boxed{A(2;1) \text{ est bien le centre de symétrie de la courbe } C_f}$.

5) Comme C_f est symétrique par rapport à $A(2;1)$, les asymptotes sont aussi symétriques par rapport à ce point, ainsi que toutes les limites. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to2;x<2} f(x) = +\infty}$ et la droite Δ, qui passe par A et qui est donc sa propre symétrique, est asymptote à C_f en $-\infty$ et $\boxed{C_f \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty;2[}$.

Exercice 3

C_f passe par $A(1;0)$ donc $f(1)=0$ ce qui signifie que $\frac{a+b+c}{(1+d)^2}=0$ ou encore $\boxed{a+b+c=0}$.

La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la C_f donc -1 est une valeur interdite de f, ce qui revient à dire que $-1+d=0$ ou encore $\boxed{d=1}$.

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ ce qui signifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Or f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2}{x^2}\right)=a$.

Donc $\boxed{a=1}$

La dernière information indique que le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A a pour coefficient directeur -2 donc $f'(1)=-2$. Calculons f' :

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u=x^2+bx+c$ donc $u'=2x+b$ et $v=(x+1)^2=x^2+2x+1$ et donc $v'=2x+2$, en utilisant les valeurs de a et d déjà trouvées.

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x+b)(x+1)^2-(x^2+bx+c)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+b)(x+1)-2(x^2+bx+c)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+2x+bx+b-2x^2-2bx-2c}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(2-b)x+b-2c}{(x+1)^3}$$

Finalement, $f'(1)=\frac{2-b+b-2c}{2^3}=\frac{2-2c}{8}=\frac{1-c}{4}$.

On obtient donc l'équation $\frac{1-c}{4}=-2$ ce qui donne $\boxed{c=9}$

On reprend la première équation trouvée : $a+b+c=0$ et on trouve alors $\boxed{b=-10}$.

Finalement, $f(x)=\frac{x^2-10x+9}{(x+1)^2}$.

Exercice 4

1) f est le produit de deux fonctions : $u: x\mapsto x^2-5x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $v: x\mapsto\sqrt{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est définie sur $\boxed{D_f=\mathbb{R}^+}$.

2) Pour déterminer les antécédents de 0 par f, on doit résoudre $f(x)=0$, autrement dit $(x^2-5x)\sqrt{x}=0$.
Or, si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul donc $x^2-5x=0$ ou $\sqrt{x}=0$.
La première équation nous donne deux solutions : 0 et 5 et la seconde nous donne une solution : 0.
$\boxed{\text{Finalement, 0 a deux antécédents par } f \text{ : 0 et 5.}}$

3) $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x^2-5x)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{cases}$ donc par multiplication, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

4) f est le produit de u dérivable sur $\mathbb{R}$ et de v dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$ et

$$f'(x)=u'v+uv'=(2x-5)\sqrt{x}+(x^2-5x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(2x-5)\times 2x+(x^2-5x)}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-15x}{2\sqrt{x}}$$

Finalement, $\boxed{f'(x)=\frac{5x(x-3)}{2\sqrt{x}}}$.

5) Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de $f'(x)$ sur D_f. Le dénominateur est strictement positif et donc $f'(x)$ est du signe de $5x(x-3)$.

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

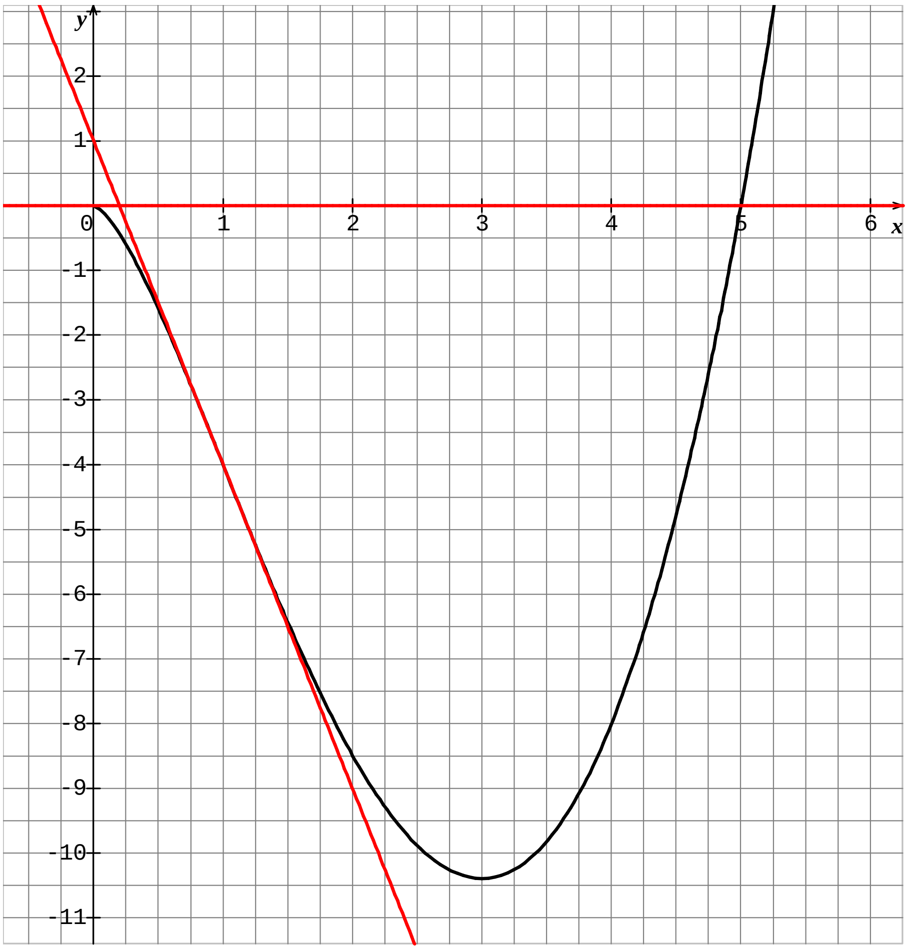
6) $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(h^2-5h)\sqrt{h}-0}{h} = (h-5)\sqrt{h}$

Quand h prend des valeurs très proches de 0, alors $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ prend des valeurs proches de 0 donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0)=0}$.

7) L'équation de T_0 est de la forme $y = f'(0)x + f(0)$ or $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$ donc l'équation de T_0 est $\boxed{y=0}$.

8) L'équation de T_1 est de la forme $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = \frac{5\times1(1-3)}{2\times\sqrt{1}} = -5$ et $f(1) = (1-5)\sqrt{1} = -4$ donc l'équation devient : $y = -5(x-1) - 4$ ou encore : $\boxed{y=-5x+1}$.

9) Tracé de la courbe ainsi que de T_0 et T_1 :



10) On considère l'équation $x^3 - 5x^2 - m\sqrt{x} = 0$. Dans un premier temps, on peut voir que 0 est toujours solution. Par ailleurs, pour $x > 0$, on a :

$$x^3 - 5x^2 - m\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow (x^2 - 5x)\sqrt{x} = m$$

En utilisant l'ensemble des questions précédentes (essentiellement le tableau de variations de f), on peut indiquer que :

- si $m < -6\sqrt{3}$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions ;
- si $m = -6\sqrt{3}$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est 3 ;
- si $-6\sqrt{3} < m < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions différentes de 0;
- si $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions 0 et 5 ;
- si $m > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution différente de 0.

En regroupant les résultats avec la solution 0 qui est présente dans tous les cas :

Si $m < -6\sqrt{3}$, l'équation a une seule solution ; si $m = -6\sqrt{3}$, l'équation a deux solutions ; si $-6\sqrt{3} < m < 0$, l'équation a trois solutions ; si $m \geq 0$, l'équation a deux solutions.

Correction devoir surveillé n°7 Sujet B

Exercice 1

1) La fonction f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{4x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{4x} = 0$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

2) -2 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f. On observe que -2 est aussi une racine du numérateur car $2 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 12 = 0$. Donc, $2x^2 - 2x - 12$ est factorisable par $(x+2)$. On cherche alors a et b tels que $2x^2 - 2x - 12 = (x+2)(ax+b)$.

On développe le membre de droite : $ax^2 + (b+2a)x + 2b$.

Par identification, on trouve : $\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = -2 \\ 2b = -12 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$.

Finalement, $2x^2 - 2x - 12 = (x+2)(2x-6)$.

Reprenons la fonction f : $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x+2} = \frac{(x+2)(2x-6)}{x+2} = 2x - 6$.

On a donc $\boxed{\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} 2x - 6 = -10}$.

3) $\begin{cases} \lim_{x\to-1} 1 - 5x^4 = -4 \\ \lim_{x\to-1} (3x+3)^2 = 0^+ \end{cases}$ donc par division, $\boxed{\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty}$

Exercice 2

1) f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$. On a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2) $\begin{cases} \lim_{x\to3;x>3} -x^2 + 5x - 8 = -3^2 + 5 \times 3 - 8 = -2 \\ \lim_{x\to3;x>3} x - 3 = 0^+ \end{cases}$ donc par division, $\boxed{\lim_{x\to3;x>3} f(x) = -\infty}$

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe de la fonction } f \text{ admet la droite d'équation } x = 3 \text{ comme asymptote verticale.}}$

3) $f(x) - (-x+2) = \frac{(-x^2+5x-8)-(x-3)(-x+2)}{x-3} = \frac{-x^2+5x-8+x^2-3x-2x+6}{x-3} = -\frac{2}{x-3}$.

Or $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -2 = -2 \\ \lim_{x\to+\infty} x - 3 = +\infty \end{cases}$ donc par division, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x-3} = 0$.

Ceci démontre que $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est bien une asymptote oblique à } C_f \text{ en } +\infty.}$

Pour étudier la position relative de C_f et Δ, on doit étudier le signe de $f(x) - (-x+2) = -\frac{2}{(x-3)}$.

Or, sur $]3;+\infty[$, $x - 3 > 0$ et donc $-\frac{2}{x-3} < 0$. Ceci montre que $\boxed{C_f \text{ est au dessous de } \Delta \text{ sur }]3;+\infty[}$.

4) On doit montrer que $\frac{f(3+x)+f(3-x)}{2} = -1$.

$$f(3+x) + f(3-x) = \frac{-(3+x)^2 + 5(3+x) - 8}{3+x-3} + \frac{-(3-x)^2 + 5(3-x) - 8}{3-x-3}$$
$$= \frac{-9 - 6x - x^2 + 15 + 5x - 8}{x} + \frac{-9 + 6x - x^2 + 15 - 5x - 8}{-x}$$
$$= \frac{-x^2 - x - 2}{x} - \frac{-x^2 + x - 2}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$$

Donc $\frac{f(3+x)+f(3-x)}{2} = -1$ et $\boxed{A(3;-1) \text{ est bien le centre de symétrie de la courbe } C_f}$.

5) Comme C_f est symétrique par rapport à $A(3;-1)$, les asymptotes sont aussi symétriques par rapport à ce point, ainsi que toutes les limites. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to3;x<3} f(x) = +\infty}$ et la droite Δ, qui passe par A et qui est donc sa propre symétrique, est asymptote à C_f en $-\infty$ et $\boxed{C_f \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty;3[}$.

Exercice 3

C_f passe par $A(1;0)$ donc $f(1)=0$ ce qui signifie que $\frac{a+b+c}{(1+d)^2}=0$ ou encore $\boxed{a+b+c=0}$.

La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à la C_f donc -2 est une valeur interdite de f, ce qui revient à dire que $-2+d=0$ ou encore $\boxed{d=2}$.

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ ce qui signifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Or f est une fonction rationnelle donc sa limite à l'infini est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2}{x^2}\right)=a$.

Donc $\boxed{a=1}$

La dernière information indique que le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A a pour coefficient directeur 2 donc $f'(1)=2$. Calculons f' :

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u=x^2+bx+c$ donc $u'=2x+b$ et $v=(x+1)^2=x^2+2x+1$ et donc $v'=2x+2$, en utilisant les valeurs de a et d déjà trouvées.

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2x+b)(x+1)^2-(x^2+bx+c)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+b)(x+1)-2(x^2+bx+c)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+2x+bx+b-2x^2-2bx-2c}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(2-b)x+b-2c}{(x+1)^3}$$

Finalement, $f'(1)=\frac{2-b+b-2c}{2^3}=\frac{2-2c}{8}=\frac{1-c}{4}$.

On obtient donc l'équation $\frac{1-c}{4}=2$ ce qui donne $\boxed{c=-7}$

On reprend la première équation trouvée : $a+b+c=0$ et on trouve alors $\boxed{b=6}$.

Finalement, $f(x)=\frac{x^2+6x-7}{(x+2)^2}$.

Exercice 4

1) f est le produit de deux fonctions : $u: x\mapsto 5x-x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $v: x\mapsto\sqrt{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est définie sur $\boxed{D_f=\mathbb{R}^+}$.

2) Pour déterminer les antécédents de 0 par f, on doit résoudre $f(x)=0$, autrement dit $(5x-x^2)\sqrt{x}=0$.

Or, si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul donc $5x-x^2=0$ ou $\sqrt{x}=0$.

La première équation nous donne deux solutions : 0 et 5 et la seconde nous donne une solution : 0.

$\boxed{\text{Finalement, 0 a deux antécédents par } f \text{ : 0 et 5.}}$

3) $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(5x-x^2)=\lim_{x\to+\infty}-x^2=-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{cases}$ donc par multiplication, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

4) f est le produit de u dérivable sur $\mathbb{R}$ et de v dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$ et

$$f'(x)=u'v+uv'=(5-2x)\sqrt{x}+(5x-x^2)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(5-2x)\times 2x+(5x-x^2)}{2\sqrt{x}}=\frac{15x-5x^2}{2\sqrt{x}}$$

Finalement, $\boxed{f'(x)=\frac{5x(3-x)}{2\sqrt{x}}}$.

5) Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de $f'(x)$ sur D_f. Le dénominateur est strictement positif et donc $f'(x)$ est du signe de $5x(3-x)$.

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

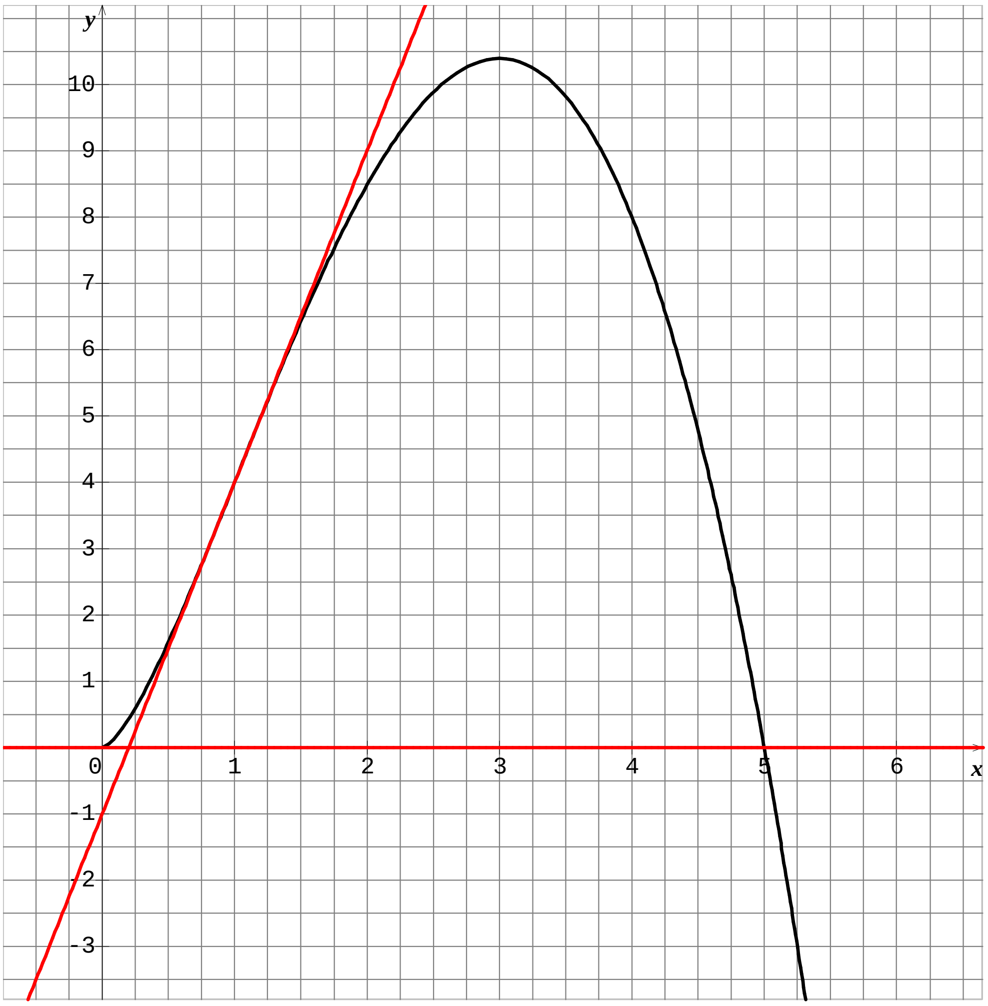
6) $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(5h-h^2)\sqrt{h}-0}{h} = (5-h)\sqrt{h}$

Quand h prend des valeurs très proches de 0, alors $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ prend des valeurs proches de 0 donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 0}$.

7) L'équation de T_0 est de la forme $y = f'(0)x + f(0)$ or $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$ donc l'équation de T_0 est $\boxed{y = 0}$.

8) L'équation de T_1 est de la forme $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = \frac{5\times1(3-1)}{2\times\sqrt{1}} = 5$ et $f(1) = (5-1)\sqrt{1} = 4$ donc l'équation devient : $y = 5(x-1) + 4$ ou encore : $\boxed{y = 5x-1}$.

9) Tracé de la courbe ainsi que de T_0 et T_1 :



10) On considère l'équation $x^3 - 5x^2 + m\sqrt{x} = 0$. Dans un premier temps, on peut voir que 0 est toujours solution. Par ailleurs, pour $x > 0$, on a :

$$x^3 - 5x^2 + m\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - x^3 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow (5x - x^2)\sqrt{x} = m$$

En utilisant l'ensemble des questions précédentes (essentiellement le tableau de variations de f), on peut indiquer que :

- si $m > 6\sqrt{3}$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions ;
- si $m = 6\sqrt{3}$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est 3 ;
- si $0 < m < 6\sqrt{3}$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions différentes de 0;
- si $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions 0 et 5 ;
- si $m < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution différente de 0.

En regroupant les résultats avec la solution 0 qui est présente dans tous les cas :

Si $m > 6\sqrt{3}$, l'équation a une seule solution ; si $m = -6\sqrt{3}$, l'équation a deux solutions ; si $0 < m < 6\sqrt{3}$, l'équation a trois solutions ; si $m \geq 0$, l'équation a deux solutions.