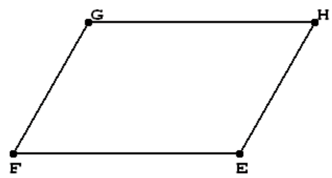
Correction devoir surveillé n°8 Sujet A

Exercice 1

1) $B(b;0)$, $C(0;a)$ et $I\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)$ donc $\boxed{I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)}$

2) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-b}{a}$ donc : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC}=-\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et les droites $\boxed{(OI) \text{ et } (BC) \text{ sont perpendiculaires.}}$

Exercice 2



$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=FE\times FG\times\cos(EFG)=6\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=24\times\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=12}$

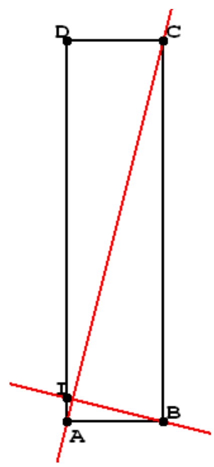
$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FE}.\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}\right)=\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{GH}=12+\overrightarrow{FE}^2=12+6^2$

Donc $\boxed{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FH}=48}$

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right).\overrightarrow{EF}=EF^2+\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{EF}=6^2-\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FE}=36-12$

Donc $\boxed{\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF}=24}$

Exercice 3



On considère un repère $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{AB}=a\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AD}=4a\vec{\jmath}$.

Alors $A(0;0)$, $B(a;0)$, $D(0;4a)$, $C(a;4a)$ et $I(0;y)$.

On cherche y tel que (BI) et (AC) soient perpendiculaires, donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=0$.

Or : $\overrightarrow{BI}\binom{-a}{y}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{a}{4a}$.

Donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=-a\times a+y\times4a$.

On en déduit l'équation : $-a^2+4ay=0$ et donc, comme $a\neq0$, $y=\frac{a}{4}$.

Finalement, le point I appartient au segment $[AD]$ et est tel que $\boxed{AI=\frac{AB}{4}=\frac{AD}{16}}$

Exercice 4

1) Plusieurs méthodes sont possibles : coordonnées dans un repère ou décomposition par la relation de Chasles. Cette dernière méthode donne :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}$$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ car $ABCD$ est un carré et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}=0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}=AB\times DJ$ car les vecteurs sont colinéaires et de même sens et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}=BI\times AD$ pour la même raison. Finalement : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=a\times\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\times a=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=a^2}$

2) D'une autre manière : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos(\theta)$

Or, on peut calculer AI et AJ en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et ADJ.

$AB^2+BI^2=AI^2$ donc $AI^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{5}{4}a^2$ et donc $AI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. De même, on trouve $AJ=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D'

$$\cos(\theta)=\frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{\frac{5a^2}{4}}=a^2\times\frac{4}{5a^2}=\frac{4}{5}$$

On en déduit : $\boxed{\theta\approx37°}$

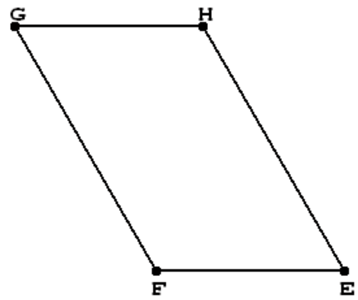
Correction devoir surveillé n°8 Sujet B

Exercice 1

3) $B(b;0)$, $C(0;a)$ et $I\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ donc $\boxed{I\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2}\right)}$

4) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{b}{2}\\\frac{a}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\binom{-a}{b}$ donc : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AD}=-\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et les droites $\boxed{(OI) \text{ et } (AD) \text{ sont perpendiculaires.}}$

Exercice 2



$$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=FE\times FG\times\cos(EFG)=4\times6\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=24\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=-12}$

$$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FE}.\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}\right)=\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{GH}=-12+\overrightarrow{FE}^2=-12+4^2$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FH}=4}$

$$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right).\overrightarrow{EF}=EF^2+\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{EF}=4^2-\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FE}=16+12$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF}=28}$

Exercice 3

1) Plusieurs méthodes sont possibles : coordonnées dans un repère ou décomposition par la relation de Chasles. Cette dernière méthode donne :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}$$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ car $ABCD$ est un carré et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}=0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}=AB\times DJ$ car les vecteurs sont colinéaires et de même sens et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}=BI\times AD$ pour la même raison. Finalement : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=a\times\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\times a=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=a^2}$

2) D'une autre manière : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos(\theta)$

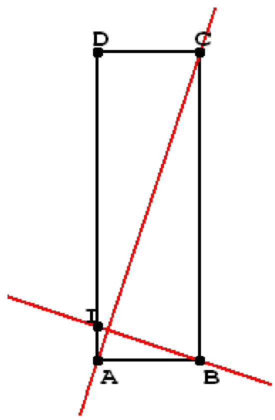
Or, on peut calculer AI et AJ en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et ADJ.

$AB^2+BI^2=AI^2$ donc $AI^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{5}{4}a^2$ et donc $AI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. De même, on trouve $AJ=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D'

$$\cos(\theta)=\frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{\frac{5a^2}{4}}=a^2\times\frac{4}{5a^2}=\frac{4}{5}$$

On en déduit : $\boxed{\theta\approx37°}$

Exercice 4



On considère un repère $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{AB}=a\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AD}=3a\vec{\jmath}$.

Alors $A(0;0)$, $B(a;0)$, $D(0;3a)$, $C(a;3a)$ et $I(0;y)$.

On cherche y tel que (BI) et (AC) soient perpendiculaires, donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=0$.

Or : $\overrightarrow{BI}\binom{-a}{y}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{a}{3a}$.

Donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=-a\times a+y\times3a$.

On en déduit l'équation : $-a^2+3ay=0$ et donc, comme $a\neq0$, $y=\frac{a}{3}$.

Finalement, le point I appartient au segment $[AD]$ et est tel que $\boxed{AI=\frac{AB}{3}=\frac{AD}{9}}$