DEVOIR SURVEILLÉ N°3 1S$_1$
1 heure

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$

1. Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$$

2. Calculer la dérivée f' de f. Quel est son signe ?

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f, puis résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
2. En déduire les coordonnées des deux points A et B en lesquels C_f admet une tangente horizontale.
3. Déterminer les coordonnées des trois points P, Q et R d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses. (On notera P celui qui a une abscisse strictement positive)
4. En déduire une équation de la tangente T à C_f en P.

Exercice 3 (5 points)

Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $(A, -2)(B, -2)(C, 8)$.

1. Exprimer E comme barycentre de A et B.
2. Démontrer que G, C et E sont alignés.
3. C est-il le milieu de $[EG]$?

Exercice 4 (5 points)

$ABCD$ est un carré de centre G et de côté 4cm.

1. Calculer la longueur GA.
2. Réduire la somme $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$ (à l'aide du point G).
3. Déterminer et représenter l'ensemble Γ_1 des points M tels que :

$$\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} \| = 8\sqrt{2}$$

4. Déterminer et représenter l'ensemble Γ_2 des points M tels que :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} \text{ soit colinéaire à } \vec{AD}$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 $1S_1$
CORRIGÉ

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$

1. Limite de f en $+\infty$:

   On a un quotient indéterminé du type "∞ / ∞". Pour lever l'indétermination, on écrit :

$$\frac{2x-5}{x-2} = \frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

   On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{5}{x}\right) = 2 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{cases}$$

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 2$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

   Limite de f en 2 "à droite" :

   On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (2x-5) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2) = 0 \text{ avec } (x-2) > 0 \text{ puisque } x > 2. \end{cases}$$

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x-5 \\ v(x) = x-2 \end{cases}$

   On a donc $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-5)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

   Comme le carré $(x-2)^2$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, la dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. On a : $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

   Résolvons l'équation $f'(x) = 0$. En factorisant :

   $$3(x-1)(x+1) = 0$$

   $$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

   $$S = \{-1 ; 1\}$$

   La dérivée s'annule donc lorsque $x = -1$ et lorsque $x = 1$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x est $f'(x)$. La tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire lorsque $f'(x) = 0$. D'après la question 1, cela se produit aux abscisses $x = -1$ puis $x = 1$.

   Les abscisses de A et B sont donc -1 et 1. Calculons leurs ordonnées respectives :

   $$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$$

   $$f(1) = 1^3 - 3 = -2$$

   Donc : $$A(-1 ; 2) \text{ et } B(1 ; -2)$$

3. C_f et l'axe des abscisses se coupent aux abscisses tels que :

   $$f(x) = 0$$

   $$x^3 - 3x = 0$$

   $$x(x^2 - 3) = 0$$

   $$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

   $$x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

   Les trois points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont :

   $$P(\sqrt{3} ; 0) ; Q(0 ; 0) \text{ et } R(-\sqrt{3} ; 0)$$

4. Une équation de la tangente T à C_f en P est : $y = ax + b$ avec $a = f'(\sqrt{3}) = 3 \times (3 - 1) = 6$.

   Donc : $$T : y = 6x + b$$

   Par ailleurs, la droite T passe le point P donc : $y_P = 6x_P + b$

   $$0 = 6 \times \sqrt{3} + b$$

   $$b = -6\sqrt{3}$$

   Conclusion : une équation de la tangente T à C_f en P est :

   $$y = 6x - 6\sqrt{3}$$

Exercice 3 (5 points)

Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $(A, -2)(B, -2)(C, 8)$.

1. Puisque E est le milieu de $[AB]$, c'est l'isobarycentre de A et B : $\begin{array}{|c|}\hline E \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

   Ce qui s'écrit encore, d'après l'homogénéité des coefficients : $\begin{array}{|c|}\hline E \\ \hline -4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -2 & -2 \\ \hline\end{array}$

2. Comme $\begin{array}{|c|}\hline G \\ \hline 4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline -2 & -2 & 8 \\ \hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|}\hline E \\ \hline -4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -2 & -2 \\ \hline\end{array}$, on a, d'après l'associativité : $\begin{array}{|c|}\hline G \\ \hline 4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline E & C \\ \hline -4 & 8 \\ \hline\end{array}$

   Ce qui s'écrit plus simplement (par homogénéité des coefficients) : $\begin{array}{|c|}\hline G \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline E & C \\ \hline -1 & 2 \\ \hline\end{array}$

   Le barycentre G de deux points E et C (distincts) étant toujours situé sur la droite constituée de ces points, on en déduit : G, E et C sont alignés.

3. D'après la question 2, on a : $\begin{array}{|c|}\hline G \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline E & C \\ \hline -1 & 2 \\ \hline\end{array}$. Ce qui s'écrit vectoriellement : $-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

   Décomposons le premier vecteur avec la relation de Chasles : $-(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE}) + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

   D'où : $-\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$

   C'est-à-dire $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$

   Ce qui signifie que C est le milieu de $[EG]$.

   Remarque :

   On peut retrouver ce résultat en combinant les tableaux suivants : $\begin{array}{|c|}\hline G \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline E & C \\ \hline -1 & 2 \\ \hline\end{array}$. et $\begin{array}{|c|}\hline E \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$

   On obtient $\begin{array}{|c|c|}\hline G & E \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline E & C & E \\ \hline -1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline C \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$

   C est donc l'isobarycentre de G et E, c'est-à-dire le milieu de $[EG]$.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

ABCD est un carré de centre *G* et de côté 4 cm.

1. La longueur *GA* est la demi-diagonale du carré *ABCD*. La diagonale d'un carré de côté *a* est $a\sqrt{2}$. (Vous pouvez retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Pythagore). D'où :

$$GA = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

2. Montrons, tout d'abord, un résultat presque évident : *G* est l'isobarycentre des points *A*, *B*, *C* et *D*.

   Pour cela, il suffit de considérer la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$. En utilisant le fait que les diagonales se coupent en leur milieu, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ d'une part, et $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$ d'autre part. Il en résulte :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

   Le centre d'un carré est donc bien l'isobarycentre des sommets.

   Réduisons maintenant la somme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG}$$

3. La relation : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 8\sqrt{2}$

   peut encore s'écrire : $\|4\overrightarrow{MG}\| = 8\sqrt{2}$

   C'est-à-dire : $MG = 2\sqrt{2}$

   Et d'après la question 1 : $GM = GA$

   Les points *M* sont donc à une distance **fixe** du point *G*. (Cette distance fixe étant ici *GA*)

   Donc Γ_1 est le cercle de centre *G* et de rayon *GA*.

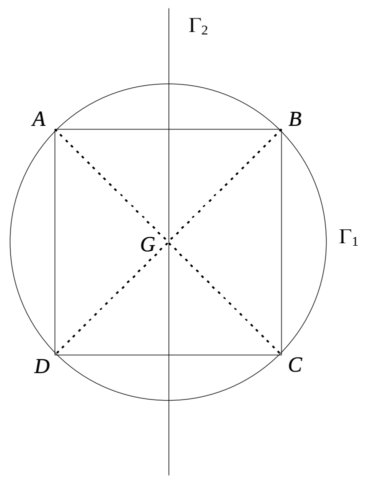
   Autrement dit, Γ_1 est le cercle circonscrit au carré *ABCD*.

4. Toujours d'après la question 2, Γ_2 est l'ensemble des points *M* tels que :

$$4\overrightarrow{MG} \text{ soit colinéaire à } \overrightarrow{AD}$$

   Les points *M* sont donc situés sur la droite passant par *G* et parallèle à (*AD*).

   Γ_2 est donc cette droite.



NOM :

FICHE DE NOTATION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°3

EXERCICE 1	Critères de notations	Barème	Points
Question 1			
Limite en $+\infty$	Factorisation par x au numérateur et au dénominateur afin de lever l'indétermination (Compter seulement 0,5 si on a oublié de simplifier par x)	1	
	Détermination correcte de la limite (limite égale à 2)	0,5	
Limite en 2 "à droite"	Limite du numérateur correcte (-1)	0,5	
	Limite du dénominateur correcte (0)	0,5	
	Argument justifiant que le signe du dénominateur est positif	0,5	
	Limite du quotient correcte ($-\infty$)	0,5	
Question 2			
Calcul de la dérivée	Toute phrase précisant que f est de la forme "u/v" avec u et v précisées.	0,5	
	Détermination correcte de la dérivée ($1/(x-2)^2$)	0,5	
Signe de la dérivée	Justification du signe + (un carré est positif)	0,5	
	TOTAL	5	
EXERCICE 2			
Question 1	Dérivée correcte (factorisée ou non) ($f'(x) = 3x^3 - 3$)	0,5	
	Solutions de $f'(x) = 0$ trouvées (-1 et 1) (Compter 0 point si la solution -1 a été oubliée)	0,5	
Question 2	Argumentation du type "le coefficient directeur de la tangente correspond au nombre dérivé"	0,5	
	Argumentation du type "la tangente horizontale correspond à un coefficient directeur nul"	0,5	
	Coordonnées de A et B ($A(-1 ; 2)$; $B(1 ; -2)$ ou inversement)	0,5	
Question 3	Équation $f(x) = 0$ posée	0,5	
	Résolution de l'équation $f(x) = 0$ ($0 ; -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$) (Compter 0 point s'il manque une ou plusieurs solutions)	0,5	
Question 4	Coefficient directeur correct ($a = f'(\sqrt{3})$)	0,5	
	Le point P appartient à la tangente T (argument indispensable pour déterminer l'ordonnée à l'origine b)	0,5	
	Ordonnée à l'origine correct ($b = -6\sqrt{3}$)	0,5	
	TOTAL	5	

EXERCICE 3			
Question 1	E est l'isobarycentre de A et B ou formulation équivalente sous quelque forme que ce soit.	1	
Question 2	Utilisation de l'homogénéité des coefficients pour écrire que $(E, -4)$ est barycentre de $(A, -2)$ et $(B, -2)$ (Compter les 0,5 points si cela a été fait à la question 1)	0,5	
	Règle d'associativité précisée	0,5	
	Utilisation correcte de l'associativité pour arriver à $(G, 4)$ barycentre de $(E, -4)$ et $(C, 8)$ (ou autres coefficients à un facteur près)	1	
	Propriété "le barycentre de deux points A et B est sur la droite portée par ces deux points"	0,5	
Question 3	Tout calcul vectoriel aboutissant à une relation exprimant que C est le milieu de $[EG]$ ou que C est l'isobarycentre de E et G **OU** manipulation des tableaux aboutissant à "C est l'isobarycentre de E et G"	1,5	
	TOTAL	5	
EXERCICE 4			
Question 1	Utilisation de la formule donnant la longueur de la diagonale dans un carré (côté $\times \sqrt{2}$) ou utilisation du théorème de Pythagore pour arriver à $GA = 2\sqrt{2}$.	1	
Question 2	Utilisation du théorème du cours (concernant la réduction d'une somme de vecteurs) ou démonstration aboutissant à : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$	1	
Question 3	Transformation de $\lVert \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \rVert = 8\sqrt{2}$ en $\lVert 4\overrightarrow{MG} \rVert = 8\sqrt{2}$	0,5	
	Transformation de $\lVert 4\overrightarrow{MG} \rVert = 8\sqrt{2}$ en $MG = 2\sqrt{2}$	0,5	
	Utilisation de la question 1 pour arriver à $MG = GA$	0,5	
	Γ_1 est le cercle de centre G et de rayon GA (ou $2\sqrt{2}$)	0,5	
	Pas de points pour la représentation !		
Question 4	Transformation de " $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ colinéaire à $\overrightarrow{AD}$" en "$4\overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{AD}$"	0,5	
	Γ_2 est la droite parallèle à (AD) passant par G	0,5	
	TOTAL	5	
	GRAND TOTAL ET NOTE SUR 20	20	