Premières S - Devoir commun (2 heures)

Exercice 1 (3 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer les dérivées des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (\cos x)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$g(x) = (3x + 5)\sqrt{x} \qquad (x > 0)$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{3x + 7}{4 - x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(2x - 3 - \sqrt{x}\right)$$

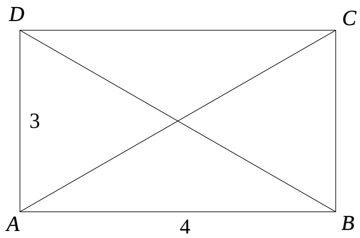
(Rappel : $x \to 4^+$ signifie : $x \to 4$ **et** $x > 4$)

3) On note C la courbe représentative de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$.

   Déterminer les coordonnées des points éventuels en lesquels la tangente à C a pour coefficient directeur 6.

Exercice 2 (4 points)

$ABCD$ est un rectangle de sens direct. On donne : $AD = 3$ et $AB = 4$.



1) Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.
2) On note A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD).

   Démontrer que : $\vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = -7$.
3) Calculer $A'C'$.

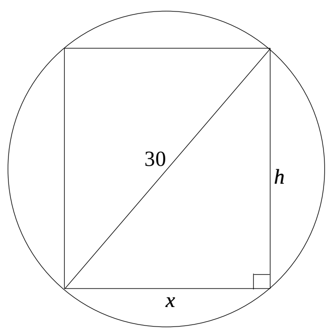
Exercice 3 (5 points)

Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire carrée mais toujours plus haute que large.

Si la base est x et la hauteur h, on montre en mécanique que la résistance à la flexion est proportionnelle au produit xh^2. (Plus xh^2 est grand, plus la résistance est grande).

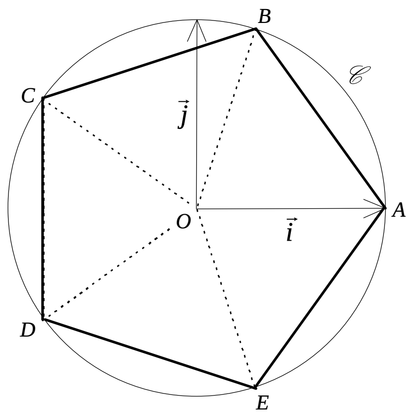
On dispose d'un tronc de 30 cm de diamètre et on veut fabriquer une poutre présentant le maximum de résistance à la flexion.

Sur le schéma ci-contre, le rectangle représente la section de la poutre et le disque la section du tronc.



1) Exprimer xh^2 en fonction de x seul.
2) Étudier les variations de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -x^3 + 900x$.
3) Déterminer les dimensions (arrondies au dixième de cm) qui offrent à la poutre la résistance maximale à la flexion.

Exercice 4 (8 points) Détermination de la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$



On a construit, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique et, sur ce cercle, les points A, B, C, D et E tels que :

- $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$
- $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OE})$ ont tous pour mesure $\frac{2\pi}{5}$

faisant apparaître ainsi le pentagone $ABCDE$ ci-contre.

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OE})$.
2) Exprimer, en fonction des mesures trouvées à la question 1), les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3) On considère le vecteur $\vec{V}$ défini par $\vec{V} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ et on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Montrer que : $$X = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$$
4) Dans cette question, un raisonnement correct est fait au sujet de l'isobarycentre G des points A, B, C, D et E. Votre tâche est de justifier rapidement les affirmations numérotées (✳1), (✳2) etc... Si vous n'y parvenez pas, vous pourrez néanmoins utiliser les résultats pour la suite de l'exercice.

   G_1, isobarycentre de B et E, appartient à (OA) (✳1)
   G_2, isobarycentre de C et D, appartient à (OA)
   Donc G appartient à (OA). (✳2)
   De manière analogue, on peut affirmer que G appartient à (OB).
   Donc G est confondu avec O. (✳3)
   J'en déduis que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. (✳4)
   Par conséquent $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$ (✳5)

5) a) Exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ (Vous disposez, ci-dessous, d'un formulaire de trigonométrie).

   b) Montrer que l'égalité (✳5) est équivalente à : $4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$.
6) a) Résoudre l'équation : $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

   b) Sachant, d'après la question 5)b), que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de cette équation, en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

<u>Mini formulaire de trigonométrie</u>

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$	$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

Premières S - Devoir commun - Corrigé

Exercice 1 (3 points)

1) La fonction f est du type : $f = u^3$ avec $u(x) = \cos x$

On a donc : $f' = 3u'u^2$

D'où : $f'(x) = 3 \times (-\sin x) \times \left(\cos x\right)^2$

$$f'(x) = -3 \sin x\left(\cos x\right)^2$$

La fonction g est du type : $g = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

On a donc : $g' = u'v + uv'$

D'où : $g'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+5) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}$

2) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+} (3x+7) = 19 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (4-x) = 0 \text{ avec } \mathbf{4-x<0} \text{ puisque } x<4. \end{cases}$$

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{3x+7}{4-x} = -\infty$

La différence $(2x-3) - \sqrt{x}$ est indéterminée en $+\infty$. (Type "$\infty - \infty$")

Écrivons : $(2x-3) - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(2\sqrt{x} - 1) - 3$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2\sqrt{x} - 1) = +\infty \end{cases}$$

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$

En ajoutant 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{x}\,(2\sqrt{x} - 1) + 3] = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - 3 - \sqrt{x}\right) = +\infty$

3) On a : $f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$

On sait que le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse x est $f'(x)$.

Nous devons donc résoudre : $f'(x) = 6$

$$3x^2 + 6x = 0$$

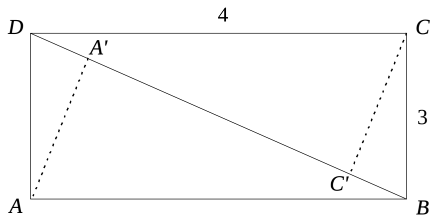
$$3x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -2$$

En outre : $f(0) = 0$ et $f(-2) = -8$

Conclusion : la tangente à C aux points $A(0\ ;\ 0)$ et $B(-2\ ;\ -8)$ a un coefficient directeur égal à 6.

Exercice 2 **(4 points)**



1) En décomposant les vecteurs suivant des directions orthogonales :

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (\vec{AD}+\vec{DC})\cdot(\vec{BA}+\vec{AD}) = (\vec{AD}+\vec{DC})\cdot(\vec{AD}-\vec{DC}) = AD^2 - DC^2 = 9-16 = -7$$

2) Le vecteur $\vec{AC}$ se projette donc orthogonalement en $\vec{A'C'}$ sur la droite dirigée par $\vec{BD}$.

Par conséquent : $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = \vec{A'C'}\cdot\vec{BD}$

Et comme, d'après la question 1), $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = -7$, on en déduit : $\vec{A'C'}\cdot\vec{BD} = -7$.

3) Les vecteurs $\vec{A'C'}$ et $\vec{BD}$ sont colinéaires de sens opposés (leur produit scalaire est négatif)

On a donc : $-A'C' \times BD = -7$

En outre, (théorème de Pythagore dans ABD) : $BD = 5$

D'où $A'C' = \dfrac{7}{5}$

Exercice 3 **(5 points)**

1) D'après le théorème de Pythagore : $h^2 = 30^2 - x^2 = 900 - x^2$

On a donc : $xh^2 = x(900 - x^2) = -x^3 + 900x$.

2) On a : $f'(x) = -3x^2 + 900 = -3(x^2 - 300) = -3(x - 10\sqrt{3})(x + 10\sqrt{3})$

Le signe du trinôme $-3x^2 + 900$ est négatif (car $a = -3$ l'est) sauf entre ses racines $-10\sqrt{3}$ et $10\sqrt{3}$.

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		$-10\sqrt{3}$		$10\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de la dérivée f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘		↗		↘	

3) D'après ce qui précède : $f(x) = xh^2$. La résistance à la flexion est donc proportionnelle à $f(x)$.

Maximiser xh^2, c'est maximiser $f(x)$. Or, x est compris entre 0 et 30. Et, d'après la question 2), la fonction f admet un maximum sur $[0 ; 30]$ en $10\sqrt{3}$.

La largeur optimale de la poutre est donc : $x = 10\sqrt{3} \simeq 17{,}3$ cm.

La hauteur correspondante est : $h^2 = 900 - x^2 = 900 - 300 = 600$ d'où $h = 10\sqrt{6} \simeq 24{,}5$ cm.

<u>Exercice 4</u> (8 points) Détermination de la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

1) La mesure principale est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. On a donc :

$$(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}\ ,\ (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{5}\ ,\ (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}) = -\frac{4\pi}{5}\ ,\ (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}) = -\frac{2\pi}{5}$$

2) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

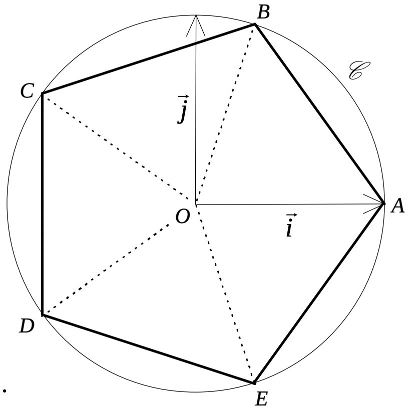
Par définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{5}\\ \sin\frac{4\pi}{5}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}\ \text{et}\ \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$$

3) $$X = X_{\overrightarrow{OA}} + X_{\overrightarrow{OB}} + X_{\overrightarrow{OC}} + X_{\overrightarrow{OD}} + X_{\overrightarrow{OE}} = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

Et comme $\cos(-\theta) = \cos\theta$ pour tout réel θ :

$$X = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$$



4) <u>Justification de (✳1)</u> :

On a : $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{5}$.

Donc la droite (OA) est la bissectrice issue de O dans le triangle OBE.

Par ailleurs : $OB = OE$ (= rayon du cercle)

Donc le triangle OBE est isocèle en O.

On en déduit que la droite (OA) est aussi la médiatrice du segment $[BE]$.

Comme l'isobarycentre G_1 de B et E est le milieu de $[BE]$, on en déduit (✳1).

Remarque : on peut aussi calculer les coordonnées de G_1.

Par un raisonnement analogue dans le triangle OCD, on obtient : $G_2 \in (OA)$

<u>Justification de (✳2)</u> :

D'après la règle d'associativité, l'isobarycentre G de A, B, C, D et E est aussi le barycentre de

$$(A, 1), (G_1, 2) \text{ et } (G_2, 2)$$

Or, les trois points A, G_1 et G_2 sont sur la droite (OA). D'où (✳2).

De manière analogue, on peut affirmer que G appartient à (OB).

<u>Justification de (✳3)</u> :

Comme $G \in (OA)$ et $G \in (OB)$, on en déduit $G = O$, c'est-à-dire (✳3).

<u>Justification de (✳4)</u> :

Par définition de l'isobarycentre G, on a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

Et comme $G = O$: $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} = \vec{0}\ . \qquad (✳4)$$

<u>Justification de (✳5)</u> :

D'après (✳4), les coordonnées de $\overrightarrow{V}$ sont nulles. En particulier : $X = 0$.

Par conséquent : $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$ (✳5)

5) a) D'après la relation $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ appliquée avec $a = \frac{2\pi}{5}$, on obtient :

$$\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$$

b) Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Et d'après 5)a) : $$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right) = 0$$

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0.$$

6) a) Le discriminant du trinôme $4t^2 + 2t - 1$ est $\Delta = 20$.

L'équation proposée admet donc deux solutions distinctes : $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

b) Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a nécessairement : $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$.

Or, $t_1 > 0$ et $t_2 < 0$. Donc : $$\cos\frac{2\pi}{5} = t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$