

1S₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Démontrer que f est minorée par 2 sur \mathbb{R} .
3. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
4. Déterminer deux fonctions g et h telles que $f = g \circ h$.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f .
4. Démontrer que la fonction f est majorée par 2 sur D_f . (On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$)

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4$

1. Démontrer que, quels que soient les réels X et Y , on a : $X^4 - Y^4 = (X - Y)(X + Y)(X^2 + Y^2)$.
2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. Étudier la parité de f . En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty ; 0]$.

Exercice 4 (6 points)

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = 1,0000002 \text{ et } B = \sqrt{1,0000004}$$

1. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

- a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
 - b) Vérifier que $f(4 \times 10^{-7}) = B$. Que vaut $g(4 \times 10^{-7})$?
2. Pour comparer les nombres A et B , on va comparer les fonctions f et g .
 - a) Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$.
 - b) Calculer $[f(x)]^2$ et $[g(x)]^2$.
 - c) Démontrer que $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$
 - d) En déduire que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$
 - e) Conclure.