1S$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°5 (2 heures)

Exercice 1 (6 points)

Étudier les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$

c) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)$

Exercice 2 (2 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x-2000)}{2000}$

Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 3 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;\,2\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2-x+6}{x^2-3x+2}$$

On note C la courbe représentant f.

1. Soit $P(x)=2x^3-5x^2-x+6$.

   Vérifier que 2 est racine de P, puis factoriser P par $x-2$.
2. Étudier la limite de f en 2. La droite d'équation $x=2$ est-elle une asymptote verticale à la courbe C ?
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

   Préciser, s'il y a lieu, l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$.
4. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe C.

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie pour $x\in[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Démontrer que pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
2. En déduire que pour tout $x\in[1\,;+\infty[$ on a : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.